সরল
মাধ্যমিক গণিত

[পাটীগণিত, বীজগণিত ও জ্যামিতি]

সপ্তম শ্রেণী

সত্যেন্দ্রনাথ গুপ্ত
মানব বসু

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষদ কর্তৃক অনুমোদিত ১৯৭৪ সালের নব-প্রবর্তিত পাঠ্যসূচী অনুযায়ী মাধ্যমিক ও নিম্নমাধ্যমিক বিদ্যালয় সমূহের ৭ম শ্রেণীর জন্য লিখিত।

[পর্ষদের ১৮, ৭, ৭৩ তারিখের ১০০১৫/জি. পত্র দ্রষ্টব্য]

সরল
মাধ্যমিক গণিত

—সপ্তম শ্রেণী—

শ্রীসত্যেন্দ্রনাথ গুপ্ত, বি. এস.-সি.

সাউথ সাবার্বান (মেইন) উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ভবানীপুর, কলিকাতা; কাশীপুর হরিশঙ্কর বাণীপীঠ ; বরানগর-নরেন্দ্র বিদ্যামন্দির ; বাটানগর হাইস্কুল ; ব্রাহ্মণবাড়িয়া অন্নদা হাইস্কুল প্রভৃতির ভূতপূর্ব গণিত ও বিজ্ঞান শিক্ষক।

ও

শ্রীমানব বসু, এম. এস.-সি.

গণিত শিক্ষক, নব বারাকপুর উচ্চতর বালকবিদ্যালয় ; ভূতপূর্ব গণিত শিক্ষক, উত্তর দমদম বিদ্যাপীঠ (বালিকাবিভাগ)

মজুমদার ব্রাদার্স

১৮বি, শ্যামাচরণ দে ষ্ট্রীট, কলিকাতা-১২

প্রকাশক :
শ্রীসুশীল মজুমদার
দমদম, ২৪ পরগণা

বিক্রয়কেন্দ্র :
নিউ বুক এজেন্সী
১৮বি, শ্যামাচরণ দে ষ্ট্রীট
কলিকাতা-৭০০০১২

প্রথম প্রকাশ : ডিসেম্বর, ১৯৭৪

মূল্য : সাত টাকা পঞ্চান্ন পয়সা মাত্র।

—মুদ্রাকর—

পাটীগণিতাংশ
শ্যামলী ঘোষ
সুকল্যাণী প্রেস
১৫/বি, বিনোদ সাহা লেন
কলিকাতা-৬

বীজগণিতাংশ
শ্রীতুলসী চরণ বক্সী
ন্যাশনাল প্রিন্টিং ওয়ার্কস
৩৩-ডি, মদন মিত্র লেন,
কলিকাতা-৬

জ্যামিতি-অংশ
শ্রীপঞ্চানন পাল
লক্ষ্মী-শ্রী প্রেস
১৬/১, ঈশ্বর মিল লেন
কলিকাতা-৬

Syllabus of Mathematics

Class VII

Arithmetic (30 marks)

1. Revision of previous work.
2. H. C. F. and L. C. M. of Vulgar Fractions and decimal Fractions—Application in simple problems.
3. Square root by division—Application in simple problems.
4. Application of unitary method in Simple problems relating to time and work simple interest (problems should be dirrect.)

Algebra (40 marks)

1. The use of symbols to generalise simple arithmetical problems (without formally introducing equations).
2. Number system—Integers (positive and negative).
3. Basic operations on integers.
4. Laws—Associative, distributive etc. (use of brackets.)
5. Polynomials—Addition and Subtraction, multiplication of polynomials with two terms. Division of polynomials (divisor being one term.)
6. The Following Formulæ and their easy applications ;

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

7. Simple Factors involving above Formulæ.
8. Solutions of simple problems leading to simple linear equations and inequations.
9. Graphs of simple equations.

Geometry (30 marks)

[*The aim is same as in Class VI*

1. (i) Simple ideas of translation and rotation by objects found ni daily life - their properties.
   (ii) Idea of rotational Symmetry in geometrical figures like equilateral triangle, parallelogram, circle etc.
   (iii) Composition of transformations—congruence.

2. Constructions :
   (i) Angle congruent to a given angle.
   (ii) Constructions of triangles with given parts.
   (iii) Constructions of quadrilaterals with given parts.

সূচীপত্র

পাটীগণিত

বীজগণিত

জ্যামিতি

পাটীগণিতাংশ

প্রথম অধ্যায়

পূর্ববর্তী পাঠের পুনরালোচনা

তোমরা পূর্ববর্তী শ্রেণীতে বিশেষ করিয়া ষষ্ঠ শ্রেণীতে যে সকল অঙ্ক ও উহার নিয়ম শিখিয়াছ, এই অধ্যায়ে অতি সংক্ষেপে সেই সকল বিষয়ের পুনরালোচনা করা হইল।

1. স্বাভাবিক সংখ্যা, মৌলিক ও কৃত্রিম সংখ্যা, গুণনীয়ক ও গুণিতক :

স্বাভাবিক সংখ্যা : 1, 2, 3, 4, 5, 6 প্রভৃতি পর পর সংখ্যাগুলিকে স্বাভাবিক সংখ্যা বলে।

মৌলিক সংখ্যা : যে সংখ্যা শুধুমাত্র 1 এবং সেই সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য, অন্য কোন সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য নয় সেই সংখ্যাকে মৌলিক সংখ্যা বলে। যেমন, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17 ইত্যাদি।

কৃত্রিম সংখ্যা : যে সংখ্যা 1 এবং সেই সংখ্যা ছাড়াও অন্য সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য, তাহাকে কৃত্রিম সংখ্যা বলে।

যেমন, 4, 8, 12, 15, 21 ইত্যাদি।

গুণনীয়ক এবং গুণিতক : কোন একটি সংখ্যাকে অপর একটি সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে যদি কোন অবশিষ্ট না থাকে, তবে প্রথম সংখ্যাটিকে দ্বিতীয় সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য বলা হয়। যেমন, 24 সংখ্যাটি 2, 3, 4, 6, 8, 12 দ্বারা বিভাজ্য।

যদি একটি সংখ্যা অপর একটি সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য হয়, তাহা হইলে দ্বিতীয় সংখ্যাটিকে প্রথম সংখ্যার গুণনীয়ক বা উৎপাদক বলে এবং প্রথম সংখ্যাকে দ্বিতীয় সংখ্যার গুণিতক বলে। যেমন, 2, 3,

4, 6, 8, 12 ইহাদের প্রত্যেকটি 24-এর গুণনীয়ক বা উৎপাদক এবং 24 সংখ্যাটি 2, 3, 4, 6, 8, 12 ইহাদের প্রত্যেকটির গুণিতক।

মৌলিক উৎপাদক : কোন সংখ্যার বিভিন্ন উৎপাদকগুলির মধ্যে যেগুলি মৌলিক সংখ্যা তাহাদের উক্ত সংখ্যার মৌলিক উৎপাদক বলে। যেমন, 24-এর উৎপাদকগুলির মধ্যে 2 ও 3 মৌলিক উৎপাদক কিন্তু 4, 6, 8, 12 মৌলিক উৎপাদক নহে।

পরস্পর মৌলিক সংখ্যা : দুই বা ততোধিক সংখ্যার 1 ভিন্ন অপর কোনও সাধারণ গুণনীয়ক না থাকিলে ঐ সংখ্যাগুলিকে পরস্পর মৌলিক সংখ্যা বলা হয়। যেমন, 3, 5, 7 বা 8, 9, 25 পরস্পর মৌলিক সংখ্যা। পরস্পর মৌলিক সংখ্যাগুলি নিজেরা মৌলিক নাও হইতে পারে। 8, 9 ও 25 সংখ্যা তিনটির কোনটিই মৌলিক নহে কিন্তু উহারা পরস্পর মৌলিক।

2. বিভাজ্যতার নিয়ম :

(1) যে-কোন একটি সংখ্যা অপর কোনও একটি সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য হইলে প্রথম সংখ্যাটির যে-কোন সরল গুণিতক দ্বিতীয় সংখ্যাটি দ্বারা সর্বদা বিভাজ্য হইবে। যেমন, 24, 8 দ্বারা বিভাজ্য। সুতরাং 24-এর যে-কোন সরল গুণিতক অর্থাৎ 48, 72, 96 প্রভৃতি সংখ্যাও 8 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

(2) যে-কোন একটি সংখ্যা অপর কোন একটি সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য হইলে দ্বিতীয় সংখ্যাটির যে কোন উৎপাদক বা গুণনীয়ক দ্বারাও প্রথম সংখ্যাটি বিভাজ্য হইবে। যেমন, 40, 20 দ্বারা বিভাজ্য, সুতরাং 20-এর যে-কোন গুণনীয়ক অর্থাৎ 4, 5 ও 10 দ্বারা 40 বিভাজ্য হইবে।

(3) যে-কোন দুইটি সংখ্যার প্রত্যেকটি যদি অপর একটি সংখ্যা

দ্বারা বিভাজ্য হয়, তাহা হইলে প্রথমোক্ত সংখ্যা দুইটির সমষ্টি ও অন্তরফল শেষোক্ত সংখ্যাটি দ্বারা বিভাজ্য হইবে। যেমন, 15 ও 24 ইহারা প্রত্যেকেই 3 দ্বারা বিভাজ্য সুতরাং 15 ও 24-এর যোগফল অর্থাৎ 39, 3 দ্বারা বিভাজ্য এবং 24 ও 15-এর অন্তরফল 9-ও 3 দ্বারা বিভাজ্য।

(4) যে-কোন একটি সংখ্যা কতকগুলি মৌলিক সংখ্যা দ্বারা পৃথক পৃথক ভাবে বিভাজ্য হইলে, মৌলিক সংখ্যাগুলির গুণফল দ্বারা প্রথম সংখ্যাটি সর্বদা বিভাজ্য হইবে। যেমন, 5 ও 7 দ্বারা 175 বিভাজ্য, সুতরাং 5×7 অর্থাৎ 35 দ্বারাও 175 বিভাজ্য।

3. **বিভাজ্যতা নির্ণয়ঃ**

একটি কৃত্রিম সংখ্যা অপর কোনও মৌলিক বা কৃত্রিম সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য কিনা তাহা নির্ণয় করিবার কয়েকটি সংক্ষিপ্ত নিয়ম নিম্নে দেওয়া হইল।

1. যে সকল সংখ্যার এককের অঙ্কটি শূন্য অথবা যুগ্ম তাহারা 2 দ্বারা বিভাজ্য। যথা, 50, 180, 28, 74 ইত্যাদি।
2. যে সকল সংখ্যার অঙ্কগুলির সমষ্টি 3 দ্বারা বিভাজ্য তাহারা 3 দ্বারা বিভাজ্য। যথা, 45, 102, 234, 12345 ইত্যাদি।
3. যে সকল সংখ্যার শেষ অঙ্ক দুইটির দ্বারা প্রকাশিত সংখ্যা 4 দ্বারা বিভাজ্য অথবা যে সকল সংখ্যার শেষে দুই বা ততোধিক শূন্য থাকে তাহারা 4 দ্বারা বিভাজ্য। যথা, 536, 724, 500, 3000 ইত্যাদি।
4. যে সকল সংখ্যার শেষে শূন্য অথবা 5 থাকে তাহারা 5 দ্বারা

বিভাজ্য। যথা, 105, 315, 270 ইত্যাদি।

5. যে সকল সংখ্যার অঙ্ক সমষ্টি 3 দ্বারা বিভাজ্য এবং শেষ অঙ্কটি অর্থাৎ এককের অঙ্কটি 0, 2, 4, 6 বা 8 তাহারা 6 দ্বারা বিভাজ্য হয়। যথা, 30, 162, 234, 306, 318 ইত্যাদি।

6. যে সকল সংখ্যার শেষের তিনটি অঙ্ক দ্বারা প্রকাশিত সংখ্যাটি 8 দ্বারা বিভাজ্য অথবা যে সকল সংখ্যার শেষে তিন বা ততোধিক শূন্য থাকে তাহারা 8 দ্বারা বিভাজ্য। যথা, 3416, 1232, 4400, 3000, 70000 ইত্যাদি।

7. যে সকল সংখ্যার অঙ্কসমষ্টি 9 দ্বারা বিভাজ্য তাহারা 9 দ্বারা বিভাজ্য। যথা, 207, 351, 4302, 6039 ইত্যাদি।

8. যে সকল সংখ্যার শেষে শূন্য থাকে তাহারা 10 দ্বারা বিভাজ্য। যথা, 20, 30, 450, 1200 ইত্যাদি।

9. যে সকল সংখ্যার প্রথম, তৃতীয়, পঞ্চম প্রভৃতি স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি হইতে দ্বিতীয়, চতুর্থ, ষষ্ঠ প্রভৃতি স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি বিয়োগ করিলে বিয়োগফল শূন্য অথবা 11 দ্বারা বিভাজ্য হয় তাহারা 11 দ্বারা বিভাজ্য। যথা, 57893, 637252 ইত্যাদি।

10. যে সকল সংখ্যা 3 ও 4 দ্বারা পৃথক পৃথক ভাবে বিভাজ্য তাহারা 12 দ্বারা বিভাজ্য। যথা, 396, 2484, 10596 ইত্যাদি।

11. যে সকল সংখ্যা 3 ও 5 উভয় সংখ্যা দ্বারা পৃথক পৃথক ভাবে বিভাজ্য তাহারা 15 দ্বারা বিভাজ্য। যথা, 2385, 18450, 5025 ইত্যাদি।

12. যে সকল সংখ্যার শেষের অঙ্ক দুইটি 25, 50 বা 75 অথবা যে সকল সংখ্যার শেষে দুই বা ততোধিক শূন্য থাকে, তাহারা 25 দ্বারা বিভাজ্য। যথা, 3425, 4750, 2675, 14500 ইত্যাদি।

13. যে সকল সংখ্যার শেষ তিনটি অঙ্ক শূন্য অথবা শেষ তিনটি অঙ্কের দ্বারা গঠিত সংখ্যা 125 দ্বারা বিভাজ্য তাহারা 125 দ্বারা বিভাজ্য। যথা, 3000, 4625, 7250 ইত্যাদি।

14. কোনও একটি সংখ্যা 7, 11, 13 দ্বারা বিভাজ্য কিনা নির্ণয় করিবার নিয়মটি একটু জটিল। প্রথমে সংখ্যাটির ডান দিক হইতে তিনটি অঙ্ক পর পর কমা বসাইয়া কতিপয় অংশে বিভক্ত করিয়া লইতে হয়। পরে প্রথম, তৃতীয়, পঞ্চম ইত্যাদি অংশগুলির সমষ্টি এবং দ্বিতীয়, চতুর্থ, ষষ্ঠ ইত্যাদি অংশগুলির সমষ্টি পৃথক পৃথক ভাবে লইয়া সমষ্টি দুইটির বিয়োগফল নির্ণয় করিতে হয়। এই বিয়োগফল যদি 7, 11 ও 13 দ্বারা বিভাজ্য হয় তাহা হইলে সংখ্যাটিও 7, 11, 13 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

মনে কর, 844175380246198 সংখ্যাটি 7, 11 ও 13 দ্বারা বিভাজ্য কিনা নির্ণয় করিতে হইবে। ডান দিক হইতে তিনটি অঙ্ক পর পর কমা বসাইয়া সংখ্যাটিকে লিখিলে দাঁড়ায় 844, 175, 380, 246, 198।

ইহার প্রথম, তৃতীয় ও পঞ্চম অংশগুলির সমষ্টি $= 198 + 380 + 844 = 1422$

দ্বিতীয় ও চতুর্থ অংশ দুইটির সমষ্টি $= 246 + 175 = 421$

সমষ্টি দুইটির বিয়োগফল $= 1422 - 421 = 1001$

এখন, $1001 = 7 \times 11 \times 13$; $\therefore$ 1001 এই সংখ্যাটি 7, 11 এবং 13 দ্বারা বিভাজ্য। অতএব প্রদত্ত সংখ্যাটি অর্থাৎ

844175380246198, 7, 11 ও 13 দ্বারা বিভাজ্য।

গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ. সা. গু.)

4. সাধারণ গুণনীয়ক : যে সংখ্যা একাধিক সংখ্যার গুণনীয়ক, তাহাকে ঐ সংখ্যাগুলির সাধারণ গুণনীয়ক বলে। যেমন, $9 \times 7 = 63$ এবং $9 \times 11 = 99$; এস্থলে 63 এবং 99-এর সাধারণ গুণনীয়ক হইতেছে 9.

গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক : দুই বা ততোধিক সংখ্যার যতগুলি সাধারণ গুণনীয়ক হইতে পারে তাহাদের মধ্যে যেটি সর্বাপেক্ষা বড়, তাহাকে ঐ সংখ্যাগুলির গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক বলে। যেমন, 24 ও 60-এর সাধারণ গুণনীয়কগুলি হইতেছে 2, 3, 4, 6, 12 ; ইহাদের মধ্যে 12 সর্বাপেক্ষা বড় বলিয়া 24 ও 60-এর গ. সা. গু. 12 হইবে।

গ. সা. গু. নির্ণয়ের প্রণালী : 1) উৎপাদক বিশ্লেষণ পদ্ধতি : কতকগুলি সংখ্যার গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমে ঐ সংখ্যাগুলির মৌলিক গুণনীয়কগুলি নির্ণয় কর। ঐ সকল গুণনীয়কের মধ্যে যেগুলি সাধারণ গুণনীয়ক, তাহাদের গুণফলই প্রদত্ত সংখ্যাগুলির গ. সা. গু. হইবে।

উদাহরণ : 105, 280 ও 385-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

সমাধান : $105 = 3 \times 5 \times 7$

$$280 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 2^3 \times 5 \times 7$$

$$385 = 5 \times 7 \times 11$$

দেখা যাইতেছে, প্রদত্ত সংখ্যা তিনটির সাধারণ উৎপাদকগুলি যথাক্রমে 5 এবং 7

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 5 \times 7 = 35$.

(2) গ. সা. গু. নির্ণয়ের ভাগ-প্রক্রিয়া পদ্ধতি :

যে সকল ক্ষেত্রে প্রদত্ত সংখ্যাগুলি সহজে মৌলিক গুণনীয়ক বা

উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় না, সেই সকল ক্ষেত্রে এই পদ্ধতির প্রয়োগ সুবিধাজনক।

নিয়ম: (i) প্রথমে সংখ্যাগুলির মধ্যে যে সংখ্যাটি ক্ষুদ্রতম সেই সংখ্যা দ্বারা বৃহত্তম সংখ্যাটিকে ভাগ কর। যদি ভাগশেষ না থাকে তবে ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটিকেই গৃহীত সংখ্যা দুটির গ. সা. গু. বলিয়া ধরিবে।

(ii) যদি ভাগশেষ থাকে তবে যে ভাগশেষ থাকিবে তাহা দ্বারা প্রথম ভাজককে ভাগকর।

(iii) এইবার যে ভাগশেষ থাকিবে তাহা দ্বারা দ্বিতীয় ভাজককে ভাগ কর। যতক্ষণ পর্যন্ত না ভাগশেষ শূন্য হয় ততক্ষণ এই প্রক্রিয়া চালাইতে হইবে। শেষ ভাজকটি প্রথম দুইটি অর্থাৎ ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম সংখ্যা দুইটির গ. সা. গু. হইবে।

(iv) দুইটির অধিক সংখ্যার গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে প্রথম দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. ও তৃতীয় সংখ্যার গ. সা. গু. পূর্বোক্ত নিয়মে নির্ণয় কর। এক্ষেত্রে প্রাপ্ত শেষ ভাজকটি প্রথম তিনটি সংখ্যার গ. সা. গু. হইবে। এই ভাবে শেষ সংখ্যাটি পর্যন্ত এই নিয়ম অনুসরণ করিয়া গেলে প্রাপ্ত শেষ ভাজকই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।

উদাহরণ: 1176, 2184 ও 3432-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

```
1176) 3432 (2                      24) 2184 (91
      2352                              216
      ----                             ----
      1080) 1176 (1                      24
            1080                         24
            ----                        ----
              96) 1080 (11
                   96
                  ----
                  120
                   96
                  ----
                   24) 96 (4
                       96
                      ----
```

1176 ও 3432-এর গ. সা. গু. = 24 ; 24 ও প্রদত্ত অপর সংখ্যা 2184-এর গ. সা. গু. 24

∴ অতএব নির্ণেয় গ. সা. গু = 24.

দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে যাইয়া শেষ ভাজকটি 1 হইলে বুঝিতে হইবে, প্রদত্ত রাশি দুইটির 1 ভিন্ন কোনও সাধারণ গুণনীয়ক নাই। অতএব সংখ্যা দুইটি পরস্পর মৌলিক।

লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল. সা. গু.)

5. **সাধারণ গুণিতক :** যে সংখ্যা একাধিক সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য, তাহাকে ঐ সংখ্যাগুলির সাধারণ গুণিতক বলে। যেমন 4, 5 ও 6 দ্বারা 120 বিভাজ্য। সুতরাং 4, 5 ও 6-এর সাধারণ গুণিতক 120।

ল. সা. গু. : কতকগুলি সংখ্যার একাধিক সাধারণ গুণিতক থাকিতে পারে। উহাদের মধ্যে যে গুণিতকটি সর্বাপেক্ষা ক্ষুদ্র (লঘিষ্ঠ), তাহাকে ঐ সংখ্যাগুলির ল. সা. গু. বলে। যেমন, 4, 5, 6-এর সাধারণ গুণিতক 60, 120, 180, 240 ইত্যাদি হইতে পারে। ইহাদের মধ্যে 60-ই সর্বাপেক্ষা ক্ষুদ্র। সুতরাং 4, 5, 6-এর ল. সা. গু. হইবে 60।

দ্রষ্টব্য : 1. ল. সা. গু. অপেক্ষা কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যে সংখ্যাগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় করা হইয়াছে তাহাদের সকলের দ্বারা বিভাজ্য হইতে পারে না।

2. কতকগুলি মৌলিক সংখ্যার ল. সা. গু. উহাদের গুণফলের সমান হইবে।

ল. সা. গু. নির্ণয়ের প্রণালী :

(i) **উৎপাদকের সাহায্যে :** যে সংখ্যাগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে সেই সংখ্যাগুলির প্রতিটির মৌলিক উৎপাদক নির্ণয় কর। কোন সংখ্যায় একই মৌলিক উৎপাদক একাধিক বার থাকিলে তাহাকে

উপযুক্ত ঘাত চিহ্ন দিয়া প্রকাশ কর। উচ্চতম ঘাত সহ সকল প্রকার মৌলিক উৎপাদক একটি করিয়া লইয়া গুণ কর। এই উৎপাদকগুলির গুণফলই নির্ণেয় ল. সা. গু. হইবে।

উদাহরণ : 378 ও 60-এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$378 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 = 2 \times 3^3 \times 7$

এবং $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $= 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 3780$

(ii) **গ. সা. গু.-এর সাহায্যে :** যে কোন দুইটি সংখ্যার গুণফল উহাদের ল. সা. গু. ও গ. সা. গু.-এর গুণফলের সমান। সুতরাং, দুইটি সংখ্যার ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে সংখ্যা দুইটির গুণফলকে উহাদের গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিলে সংখ্যা দুইটির ল. সা. গু. পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ : 35 ও 50-এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

35 ও 50-এর গ. সা. গু. $= 5$

এবং উহাদের গুণফল $= 35 \times 50 = 1750$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $= 1750 \div 5 = 350.$

(iii) **হ্রস্বভাগ প্রক্রিয়া :** যে সংখ্যাগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে তাহাদিগকে পর পর কমা দ্বারা পৃথক করিয়া এক সারিতে বসাও। তৎপরে ইহাদের মধ্যে দুই বা ততোধিক সংখ্যার কোন মৌলিক সাধারণ গুণনীয়ক দ্বারা সংখ্যাগুলিকে ভাগ করিয়া ভাগফলগুলি ভাজ্য সংখ্যার ঠিক নীচে নীচে বসাও। অবিভাজ্য সংখ্যা-গুলিকে অবিভাজ্য সংখ্যার নীচে বসাইতে হইবে। এখন দ্বিতীয় সারিতে যে সংখ্যাগুলি পাওয়া গেল তাহাদের মধ্যে দুই বা ততোধিক সংখ্যার কোনও মৌলিক গুণনীয়ক আছে কিনা দেখ। যদি থাকে,

তবে ঐ গুণনীয়কটি দ্বারা দ্বিতীয় সারির সংখ্যাগুলিকে ভাগ করিয়া পূর্বের ন্যায় ভাগফল ও অবিভাজ্য সংখ্যাগুলি পাশাপাশি নীচে তৃতীয় সারিতে রাখ। এইরূপে ভাগ করিতে করিতে সর্বনিম্ন সারির সংখ্যা-গুলি যখন সবই পরস্পর মৌলিক হইবে তখন তাহাদের ও ভাজক সংখ্যাগুলির ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর। এইরূপে প্রাপ্ত গুণফলই নির্ণেয় ল. সা. গু. হইবে।

উদাহরণ : 12, 20, 32, 36-এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

2	12, 20, 32, 36
2	6, 10, 16, 18
3	3, 5, 8, 9
	1, 5, 8, 3

চতুর্থ সারিতে 3, 8, 5 পরস্পর মৌলিক।

∴ নির্ণেয় ল. সা. গু. $= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 8 \times 3$

$= 1440.$

মিশ্ররাশির ল. সা. গু. : কতিপয় মিশ্ররাশির ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে প্রদত্ত রাশিগুলিকে প্রথমে উহাদের নিম্নতম এককে পরিণত করিয়া লইবে। তৎপর সেই একক সংখ্যাগুলির পূর্ববর্ণিত উপায়ে ল. সা. গু. নির্ণয় করিবে। এই প্রকারে প্রাপ্ত ল. সা. গু.-কে পুনরায় মিশ্ররাশিতে পরিণত করিলেই নির্ণেয় ল. সা. গু. পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ : 10 কি. গ্রাম 300 গ্রাম, 6 কি. গ্রাম 200 গ্রাম ও 8 কি. গ্রাম 400 গ্রাম এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

10 কি. গ্রাম 300 গ্রাম $= (10000 + 300)$ গ্রাম $= 10300$ গ্রাম

6 কি. গ্রাম 200 গ্রাম $= (6000 + 200)$ গ্রাম $= 6200$ গ্রাম

8 কি. গ্রাম 400 গ্রাম $=(8000+400)$ গ্রাম $=8400$ গ্রাম

2	10300, 6200, 8400
2	5150, 3100, 4200
2	2575, 1550, 1200
5	2575, 775, 1050
5	515, 155, 210
	103, 31, 42

$$2\times2\times2\times5\times5\times103\times31\times42=26821200$$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=26821$ কি. গ্রা. 200 গ্রাম।

ভগ্নাংশ ও দশমিক

6. **ভগ্নাংশ :** যে-কোন বস্তুকে সমান কয়েকটি অংশে বিভক্ত করিলে ঐ অংশগুলির এক বা একাধিক অংশকে মূল বস্তুর ভগ্নাংশ বলা হইয়া থাকে।

ভগ্নাংশকে সংখ্যার দ্বারা প্রকাশ করিতে হইলে বস্তুটিকে যত সংখ্যক সমান ভাগে বিভক্ত করা হয়, সেই সংখ্যাটিকে একটি অনুভূমিক রেখাংশের নিম্নে এবং যত অংশ লওয়া হয় সেই সংখ্যাটিকে ঐ রেখার উপরে লিখিতে হইবে।

যেমন, একটি দণ্ডকে সমান 10 ভাগ করিয়া উহার 3 ভাগ লইলে তাহা দণ্ডটির একটি ভগ্নাংশ হইবে এবং তাহাকে $\frac{3}{10}$ দ্বারা প্রকাশ করা হইবে।

7. **ভগ্নাংশের লব ও হর :** বস্তুটিকে যত সংখ্যক সমান ভাগে বিভক্ত করা হয় সেই সংখ্যাকে ভগ্নাংশের হর বলে এবং এই হর হইতে যতগুলি অংশ লওয়া হয় সেই সংখ্যাকে ঐ ভগ্নাংশের লব বলে। যেমন, $\frac{4}{7}$ এই ভগ্নাংশের লব $=4$ এবং হর $=7$

8. **প্রকৃত ভগ্নাংশ এবং অপ্রকৃত ভগ্নাংশ :** যে ভগ্নাংশের লব, হর অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর তাহাকে প্রকৃত ভগ্নাংশ বলে এবং যে ভগ্নাংশের লব হর অপেক্ষা বৃহত্তর সেই ভগ্নাংশকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ বলে। যেমন, $\frac{5}{7}$, $\frac{13}{21}$, $\frac{9}{10}$ ইত্যাদি প্রকৃত ভগ্নাংশ এবং $\frac{13}{7}$, $\frac{32}{15}$, $\frac{9}{5}$ ইত্যাদি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

কতিপয় ভগ্নাংশের মানের তুলনা :

নিম্নলিখিত দুই প্রকারে কতিপয় ভগ্নাংশের মানের তুলনা করা যায় :

(i) প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলিকে **সমান হর-বিশিষ্ট** ভগ্নাংশে প্রকাশ করিলে যে ভগ্নাংশের লবের মান বৃহত্তম হইবে সেই ভগ্নাংশটি বৃহত্তম ভগ্নাংশ হইবে।

উদাহরণ : $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{12}$ এই ভগ্নাংশ তিনটিকে মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজাও।

সমাধান : প্রদত্ত ভগ্নাংশ তিনটির হরগুলির ল. সা. গু. = 60

$\therefore\ \frac{2}{5}=\frac{2\times12}{5\times12}=\frac{24}{60}$

$\frac{4}{6}=\frac{4\times10}{6\times10}=\frac{40}{60}$

$\frac{5}{12}=\frac{5\times5}{12\times5}=\frac{25}{60}$

[ভগ্নাংশের লব ও হরকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে উহার মানের কোনরূপ পরিবর্তন হয় না।]

সাধারণ হরে প্রকাশ করিবার ফলে ভগ্নাংশ তিনটির লবগুলি যথাক্রমে 24, 40 ও 25 হইল। লবগুলির মধ্যে 40 বৃহত্তম ও 24 ক্ষুদ্রতম।

$\therefore$ $\frac{40}{60}$ বৃহত্তম এবং $\frac{24}{60}$ ক্ষুদ্রতম ভগ্নাংশ।

অতএব মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজাইলে প্রদত্ত ভগ্নাংশ তিনটি হইবে $\frac{40}{60}$, $\frac{25}{60}$, $\frac{24}{60}$ বা $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{2}{5}$

(ii) প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলিকে সমান লব বিশিষ্ট ভগ্নাংশের আকারে প্রকাশ করিলে যে ভগ্নাংশটির হরের মান ক্ষুদ্রতম হইবে, সেই ভগ্নাংশটি বৃহত্তম ভগ্নাংশ হইবে।

উদাহরণ : $\frac{5}{9}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{5}$ ভগ্নাংশগুলিকে ছোট হইতে বড় ক্রমে সাজাও।

সমাধান : প্রদত্ত ভগ্নাংশের লবগুলির ল. সা. গু. $= 30$

প্রত্যেকটি ভগ্নাংশের লবকে 30-এ প্রকাশ করিলে,

$$\frac{5}{9}=\frac{5\times 6}{9\times 6}=\frac{30}{54}; \qquad \frac{3}{7}=\frac{3\times 10}{7\times 10}=\frac{30}{70};$$

এবং $\frac{2}{5}=\frac{2\times 15}{5\times 15}=\frac{30}{75}$

এক্ষণে প্রত্যেকটি ভগ্নাংশের লব 30 কিন্তু হরগুলি ভিন্ন ভিন্ন। হরগুলির মধ্যে 75 বৃহত্তম এবং 54 ক্ষুদ্রতম।

$\therefore$ ভগ্নাংশগুলিকে ছোট হইতে বড় ক্রমে সাজাইলে হইবে $\frac{30}{75}$, $\frac{30}{70}$, $\frac{30}{54}$ বা, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{9}$

ভগ্নাংশের যোগ এবং বিয়োগ

9. (i) সাধারণ হর-বিশিষ্ট কতিপয় ভগ্নাংশের যোগফল একটি ভগ্নাংশ হইবে যাহার হর হইবে প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলির হরের সমান এবং লব হইবে প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলির লবের সমষ্টি।

উদাহরণ : $\frac{5}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}=\frac{5+2+1}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

(ii) ভিন্ন ভিন্ন হর-বিশিষ্ট কতিপয় ভগ্নাংশের যোগ বা বিয়োগ করিতে হইলে সর্বপ্রথমে উহাদের সাধারণ হর-বিশিষ্ট ভগ্নাংশে প্রকাশ করিতে হইবে, তৎপর পূর্বের নিয়মে যোগ বা বিয়োগ করা যাইবে।

উদাহরণ ঃ $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}-\frac{7}{12}=\frac{5\times4}{6\times4}+\frac{3\times3}{8\times3}-\frac{7\times2}{12\times2}$

$=\frac{20}{24}+\frac{9}{24}-\frac{14}{24}=\frac{20+9-14}{24}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$

এই প্রক্রিয়াটি নিম্নলিখিত সংক্ষিপ্ত উপায়েও করা যাইতে পারে।

$\frac{5}{6}+\frac{3}{8}-\frac{7}{12}=\frac{5\times4+3\times3-7\times2}{24}=\frac{20+9-14}{24}$

$=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$

সরল ভগ্নাংশ ঃ যে ভগ্নাংশের লব ও হর উভয়েই পূর্ণ-সংখ্যা, তাহাকে সরল ভগ্নাংশ বলে। যেমন, $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{17}$ ইত্যাদি।

যৌগিক ভগ্নাংশ ঃ ভগ্নাংশের ভগ্নাংশকে যৌগিক ভগ্নাংশ বলে। একাধিক ভগ্নাংশ যখন 'এর' দ্বারা যুক্ত থাকে, তখন উহা একটি যৌগিক ভগ্নাংশ। যেমন, $\frac{5}{13}$ এর $\frac{6}{7}$

যৌগিক ভগ্নাংশকে সর্বদা একটি ভগ্নাংশ মনে করিয়া কাজ করিতে হয়।

জটিল ভগ্নাংশ ঃ যে সকল ভগ্নাংশের লব অথবা হর কিংবা উভয়ই ভগ্নাংশ, তাহাদের জটিল ভগ্নাংশ বলে।

যেমন, $\frac{3\frac{5}{8}}{7}$, $\frac{5}{2\frac{3}{4}}$, $\frac{2\frac{1}{3}}{4\frac{3}{5}}$ ইত্যাদি।

10. **জটিল ভগ্নাংশের সরলতা সম্পাদন ঃ**

(i) জটিল ভগ্নাংশের লবকে উহার হর দ্বারা ভাগ করিলে জটিল ভগ্নাংশটি একটি সরল ভগ্নাংশে পরিণত হয়।

(ii) কোন ভগ্নাংশের লব এবং হরকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে উহার মানের কোন পরিবর্তন হয় না ; সুতরাং জটিল ভগ্নাংশের

লবে এবং হরে যতগুলি সরল ভগ্নাংশ থাকে তাহাদের হরগুলির ল.সা.গু. দ্বারা জটিল ভগ্নাংশটির লব ও হরকে গুণ করিলে উহা একটি সরল ভগ্নাংশে পরিণত হইবে।

উদাহরণ : (i) $\dfrac{5\frac{3}{8}}{7\frac{1}{5}}=\dfrac{\frac{43}{8}}{\frac{36}{5}}=\frac{43}{8}\div\frac{36}{5}=\frac{43}{8}\times\frac{5}{36}=\frac{215}{288}$

(ii) $\dfrac{4\frac{3}{2}+3\frac{1}{4}}{4\frac{3}{2}-1\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{11}{2}+\frac{13}{4}}{\frac{11}{2}-\frac{4}{3}}=\dfrac{12(\frac{11}{2}+\frac{13}{4})}{12(\frac{11}{2}-\frac{4}{3})}$

$$=\frac{66+39}{66-16}=\frac{105}{50}=\frac{21}{10}$$

11. ক্রমিক ভগ্নাংশ বা অবিরত ভগ্নাংশ :

$\dfrac{1}{2+\dfrac{3}{4+\frac{5}{6}}}$ এইরূপ আকারবিশিষ্ট ভগ্নাংশকে ক্রমিক বা অবিরত ভগ্নাংশ বলা হয়।

উপরের ভগ্নাংশটিকে $\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{3}{4+}\,\dfrac{5}{6}$ এইরূপেও লেখা যায়। বন্ধনীর সাহায্য লইয়াও উপরোক্ত ক্রমিক ভগ্নাংশটিকে

$1\div[2+3\div\{4+5\div6\}]$ এই আকারে লেখা যায়।

এইরূপ রাশির সরলতা সম্পাদন করিতে হইলে যেমন প্রথম বন্ধনী, দ্বিতীয় বন্ধনী ও তৃতীয় বন্ধনীর কার্য পর পর করিতে হয় সেইরূপ কোনও ক্রমিক ভগ্নাংশকে সরল করিতে হইলে উহার নীচের দিক হইতে কার্য আরম্ভ করিয়া ক্রমশঃ উপরের দিকে উঠিতে হয়।

যেমন, $2+\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{2-\frac{1}{2}}}=2+\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{\frac{3}{2}}}=2+\dfrac{2}{2+\frac{2\times2}{3}}$

$$=2+\frac{2}{2+\frac{4}{3}}=2+\frac{2}{\frac{10}{3}}=2+\frac{2\times3}{10}$$

$$=2+\tfrac{3}{5}=\tfrac{13}{5}=2\tfrac{3}{5}$$

12. **সসীম ও অসীম দশমিক :** যে-সকল সামান্য ভগ্নাংশকে তুল্যমান দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত করিবার সময় ভাগ কার্যটি কয়েকটি অঙ্কের পর মিলিয়া যায়, তাহাকে **সসীম দশমিক** বলে।

যেমন $\frac{21}{40} = \cdot525$, $\frac{19}{500} = \cdot038$ ইত্যাদি।

যে-সকল ভগ্নাংশকে তুল্যমান দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত করিবার সময়ে ভাগ-ক্রিয়া কখনও শেষ হয় না, তাহাকে **অসীম দশমিক** বলে।

যেমন, $\frac{1}{3} = \cdot3333$............,

$\frac{11}{13} = \cdot8461$........ইত্যাদি।

উৎপাদকের সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয়-প্রণালী ও তাহার প্রয়োগ :

13. **বর্গমূল :** কোন একটি সংখ্যার বর্গমূল বলিতে এমন একটি সংখ্যা বুঝায়, যে-সংখ্যা দ্বারা প্রথম সংখ্যাটিকে ভাগ করিলে দ্বিতীয় সংখ্যাটিই পাওয়া যায়।

যেমন, 9-এর বর্গমূল 3 কারণ $9 \div 3 = 3$

আবার 144-এর বর্গমূল 12 কারণ $144 \div 12 = 12$

"$\surd$" চিহ্নটিকে বর্গমূল চিহ্ন বলা হয়।

কোন সংখ্যার পার্শ্বে এই চিহ্নটি থাকিলে ঐ সংখ্যার বর্গমূল বুঝায় ; যেমন $\sqrt{100} = 10$.

উৎপাদক বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে বর্গমূল নির্ণয়ের নিয়ম :

যে-সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইবে সেই সংখ্যাকে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে ;

ঐ মৌলিক উৎপাদকগুলির মধ্যে একই উৎপাদকগুলির প্রতি দুইটির জন্য অর্থাৎ প্রতি জোড়ার জন্য একটি করিয়া উৎপাদক লইয়া যতগুলি উৎপাদক পাওয়া যাইবে তাহাদের গুণফলই প্রদত্ত সংখ্যার বর্গমূল হইবে।

উদাহরণ 1. 576-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

সমাধান : $\sqrt{576}=\sqrt{2\times2\times3\times3\times4\times4}$

$=\sqrt{(2\times2)(3\times3)(4\times4)}=2\times3\times4=24.$

উদাহরণ 2. $\frac{44100}{2401}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

সমাধান : $\sqrt{\frac{44100}{2401}}=\sqrt{\frac{2\times2\times3\times3\times5\times5\times7\times7}{7\times7\times7\times7}}$

$=\sqrt{\frac{2\times2\times3\times3\times5\times5}{7\times7}}=\frac{2\times3\times5}{7}=\frac{30}{7}$

উদাহরণ 3. তোমাদের শ্রেণীকক্ষে যতগুলি বেঞ্চ আছে প্রত্যেক বেঞ্চে ততজন করিয়া ছাত্র বসে। যদি তোমাদের শ্রেণীতে 49 জন ছাত্র থাকে, তবে তোমাদের শ্রেণীকক্ষে কতগুলি বেঞ্চ আছে ?

সমাধান : শ্রেণীর মোট ছাত্রসংখ্যা = 49

শ্রেণীকক্ষে বেঞ্চের সংখ্যা এবং প্রত্যেক বেঞ্চে যতজন ছাত্র বসে তাহাদের সংখ্যা পরস্পর সমান। সুতরাং দুইটি সমান সংখ্যার গুণফল 49 হইয়াছে। অতএব শ্রেণীকক্ষে বেঞ্চের সংখ্যা 49-এর বর্গমূল হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বেঞ্চের সংখ্যা $=\sqrt{49}=\sqrt{7\times7}=7$

উদাহরণ 4. দুইটি সংখ্যার গুণফল 11250 ; বৃহত্তর সংখ্যাটি ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটির 2 গুণ। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

সমাধান : বৃহত্তর সংখ্যা × ক্ষুদ্রতর সংখ্যা = 11250

বৃহত্তর সংখ্যাটি ক্ষুদ্রতর সংখ্যার দ্বিগুণ,

$\therefore$ 2 × ক্ষুদ্রতর সংখ্যা × ক্ষুদ্রতর সংখ্যা = 11250

অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর সংখ্যার বর্গ $=\frac{11250}{2}=5625$

$\therefore$ ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি $=\sqrt{5625}=\sqrt{75\times75}=75$

অতএব নির্ণেয় ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি 75-এবং বৃহত্তর সংখ্যাটি $75\times2=150$

ঐকিক নিয়ম

14. 'এক'-এর বিশেষণ 'ঐকিক'। 'এক' কথা হইতে 'ঐকিক' কথাটির উৎপত্তি। কতকগুলি এক জাতীয় দ্রব্যের মূল্য, ওজন প্রভৃতি দেওয়া থাকিলে তাহা হইতে একটি দ্রব্যের মূল্য, ওজন প্রভৃতি নির্ণয় করিয়া তাহার সাহায্যে সেই জাতীয় অপর কোন নির্দিষ্ট সংখ্যক দ্রব্যের মূল্য, ওজন ইত্যাদি নির্ণয় করিবার প্রণালীকে ঐকিক নিয়ম বলে। শতকরা, লাভ-ক্ষতি, সময়-দূরত্ব, সময় ও কার্য প্রভৃতি বিষয়ক প্রশ্নের সমাধানে ঐকিক নিয়ম ব্যবহার করা হইয়া থাকে।

নিয়ম ঃ প্রশ্নে প্রদত্ত সর্তটি প্রথম পংক্তিতে এইরূপ ভাবে সাজাইয়া লিখিতে হয় যাহাতে প্রশ্নের নির্ণেয় রাশিটির সমজাতীয় রাশি পংক্তির ডান দিকে থাকে। দ্বিতীয় পংক্তিতে 1টি দ্রব্যের মূল্য, ওজন প্রভৃতি নির্ণয় করিতে হয় এবং সর্বশেষ পংক্তিতে আসল প্রশ্নটির উত্তরের মান নির্ণয় করিতে হয়।

নিম্নে লাভ ও ক্ষতি এবং শতকরা হার বিষয়ক প্রশ্নের সমাধানে ঐকিক নিয়মের প্রয়োগের কতিপয় উদাহরণ দেওয়া হইল।

উদাহরণ 1. এক ব্যক্তি কোন ব্যবসায়ে 10000 টাকা নিয়োগ করিয়া এক বৎসর পরে 2500 টাকা লাভ করিল। ঐ ব্যক্তি যদি ব্যবসায়ে 15800 টাকা নিয়োগ করিত, তবে এক বৎসর পরে তাহার কত লাভ হইত ?

সমাধান ঃ 10000 টাকায় 1 বৎসরে লাভ হয় 2500 টাকা

$\therefore$ 1 ,, 1 ,, ,, ,, $\frac{2500}{10000}$ টাকা

$\therefore$ 15800 ,, 1 ,, ,, ,, $\frac{2500}{10000} \times 15800$ টাকা

= (25 × 158) টাকা

= 3950 টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় লাভ = 3950 টাকা।

উদাহরণ 2. তোমাদের বিদ্যালয়ের ছাত্রাবাসে 100 জন ছাত্র যে খাদ্য 30দিনে খাইতে পারে,120জন ছাত্র সেই খাদ্য কত দিনে খাইবে?

সমাধান ঃ 100 জন ছাত্র মোট খাদ্য 30 দিনে খায়

$\therefore$ 1 জন ছাত্র ঐ খাদ্য 30 × 100 ,, ,,

$\therefore$ 120 ,, ,, ,, ,, $\frac{30 \times 100}{120}$,, ,,

= 25 দিনে খায়।

$\therefore$ নির্ণেয় দিনসংখ্যা = 25.

উদাহরণ 3. একটি ঘড়ি 180 টাকায় বিক্রয় করিয়া 20 টাকা লাভ হয়। 150 টাকায় ঐ ঘড়িটি বিক্রয় করিলে শতকরা কত টাকা লাভ বা লোকসান হইবে?

সমাধান ঃ ঘড়টি 180 টাকায় বিক্রয় করিলে 20 টাকা লাভ হয়, সুতরাং ঘড়িটির প্রকৃত মূল্য বা ক্রয়মূল্য = 180 − 20 = 160 টাকা। এখন ঘড়িটি 150 টাকায় বিক্রয় করিলে (160 − 150) টাকা = 10 টাকা লোকসান বা ক্ষতি হইবে কারণ দ্বিতায় ক্ষেত্রে বিক্রয়মূল্য ক্রয়মূল্য অপেক্ষা কম।

যেহেতু লাভ বা ক্ষতি সর্বদা ক্রয়মূল্যের উপর হয়,

∴ 160 টাকায় ক্ষতি হয় 10 টাকা

∴ 1 " " " $\frac{10}{160}$ "

∴ 100 " " " $(\frac{10}{160}\times 100)$ টাকা

$=\frac{25}{4}$ টাকা $=6\frac{1}{4}$ টাকা।

∴ 150 টাকায় ঘড়িটি বিক্রয় করিলে শতকরা $6\frac{1}{4}$ টাকা লোকসান হইবে।

বিবিধ প্রশ্নমালা—1

1. মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1729, 2310, 1638, 2805, 1764

2. প্রকৃত ভাগ না করিয়া নিম্নের কোন্ কোন্ সংখ্যা 3-এর দ্বারা বা 5-এর দ্বারা বা 3 ও 5 উভয়ের দ্বারা বিভাজ্য তাহা নির্ণয় কর।

1254, 9125, 73083, 94590, 281355

3. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির মধ্যে কোন্ কোন্ সংখ্যা 8-এর দ্বারা, কোন্ কোন্ সংখ্যা 9-এর দ্বারা এবং কোন্ কোনটি উভয়ের দ্বারা বিভাজ্য নির্ণয় কর।

35784, 46000, 41076, 73128, 81072, 99288

4. লুপ্ত অঙ্ক কি হইলে 4732* এবং 5*912 সংখ্যা দুইটি 11 দ্বারা বিভাজ্য হইবে ?

5. 1157-কে কোন্ কোন্ মৌলিক সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে প্রতিক্ষেত্রে 2 ভাগশেষ থাকিবে ?

6. গ. সা. গু. নির্ণয় কর : 85 সে.মি., 1 মি. 53 সে.মি., 5 মি. 95 সে.মি.।

7. ল. সা. গু. নির্ণয় কর : 2 টাকা 88 পয়সা, 5 টাকা 40 পয়সা, 6 টাকা 48 পয়সা।

8. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যার সহিত 1 যোগ করিলে যোগফল 2, 3, 5, 7, 11 দ্বারা বিভাজ্য হইবে ?

9. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 12, 16, 18, 20 ও 25 দ্বারা ভাগ করিলে যথাক্রমে 9, 13, 15, 17 ও 22 অবশিষ্ট থাকিবে ?

10. কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা 2407 ও 3814-কে ভাগ করিলে যথাক্রমে 7 ও 14 অবশিষ্ট থাকিবে ?

11. পাঁচ অঙ্কের কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা 25, 30, 35 ও 45 দ্বারা বিভাজ্য ?

12. দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. 105 এবং ল. সা. গু. 1260 ; একটি সংখ্যা 420 হইলে অপরটি কত ?

13. 3 কুইন্টাল 75 কিলোগ্রাম আতপ চাউল এবং 5 কুইন্টাল 60 কিলোগ্রাম সিদ্ধ চাউল পরস্পর না মিশাইয়া সমান আকারের কতকগুলি পাত্র পূর্ণ করিয়া রাখা হইল। পাত্রের সংখ্যা কমপক্ষে কত হইবে ?

14. 15ই আগস্ট স্বাধীনতা দিবস উপলক্ষ্যে ছাত্রদের মধ্যে বিতরণ করিবার জন্য 161 টাকা 40 পয়সার কমলালেবু ক্রয় করা হইল কিন্তু বিতরণ করিবার সময় কিছু কম পড়িয়া যাওয়ায় পুনরায় একই দরে আরও 38 টাকা 60 পয়সার কমলালেবু ক্রয় করা হইল। যদি প্রত্যেকটি কমলালেবুর মূল্য 18 পয়সা হইতে 22 পয়সার মধ্যবর্তী হয়, তবে একটি লেবুর দাম কত হইবে ?

15. সর্বাপেক্ষা অল্প কি পরিমাণ ঋণ মাসিক কিস্তী 15 টাকা 32 পয়সা করিয়া দিয়া অথবা মাসিক কিস্তী 17 টাকা 50 পয়সা করিয়া দিয়া পরিশোধ করা যাইতে পারে ?

16. প্রসূনের নিকট কতকগুলি মার্বেল ছিল। সে দেখিল যে মার্বেলগুলিকে যদি সে 4টি করিয়া ভাগ ভাগ করিয়া সাজায়, তবে 1টি মার্বেল বেশী থাকে ; যদি প্রতিভাগে 5টি করিয়া রাখে, তবে 2টি এবং যদি 6টি করিয়া রাখে, তবে 3টি মার্বেল বেশী থাকিয়া যায়। কমপক্ষে প্রসূনের নিকট কতগুলি মার্বেল ছিল ?

17. কোন দুগ্ধ-ব্যবসায়ী সর্বাধিক কি মাপের একটি পাত্র ব্যবহার করিয়া তিন বাড়ীতে 4 লিটার 50 সেন্টিলিটার, 3 লিটার 25 সেন্টি-লিটার এবং 5 লিটার 50 সেন্টিলিটার দুধ মাপিয়া দিতে পারিবে ?

18. একখানি তিন চাকার গাড়ীর পিছনের চাকা দুইটির প্রত্যেকটির পরিধি 2·9 মিটার এবং সামনের চাকার পরিধি 1·7 মিটার। কত মিটার রাস্তা গেলে সামনের চাকা পিছনের চাকা অপেক্ষা 24 বার বেশী ঘুরিবে ?

19. বৃহত্তম কোন্ সংখ্যা দ্বারা 1305, 4665 ও 6905-কে ভাগ করিলে প্রতিক্ষেত্রে সমান ভাগশেষ থাকে ?

20. তোমাদের বাড়ীতে নূতন গৃহ নির্মাণের জন্য রহিম নামে একজন রাজমিস্ত্রী সমান দিন মজুরি হিসাবে জানুয়ারী মাসে কয়েক দিন কাজ করিয়া 168 টাকা, ফেব্রুয়ারী মাসে কয়েক দিন কাজ করিয়া 90 টাকা এবং মার্চ মাসে কয়েক দিন কাজ করিয়া 72 টাকা মজুরি পাইল। রহিমের দৈনিক মজুরি সর্বাধিক কত হইতে পারে এবং রহিম তোমাদের বাড়ীতে মোট কত দিন কাজ করিয়াছিল ?

21. তোমরা জান সূর্যকে কেন্দ্র করিয়া গ্রহগুলি সূর্যের চারি-পাশে ঘুরিতেছে। সূর্যকে একবার প্রদক্ষিণ করিতে বুধের লাগে 88 দিন, পৃথিবীর লাগে 365 দিন এবং মঙ্গলের লাগে 685 দিন প্রায়। ঐ তিনটি গ্রহ কত বৎসর পরপর সূর্যের একই দিকে একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে ?

22. কোন রেসকোর্স ঘুরিয়া আসিতে তিনটি ঘোড়ার যথাক্রমে 5 মি. 15 সে. 4 মি. 30 সে. ও 3 মি. 45 সে. সময় লাগে। ঘোড়াগুলি একই স্থান হইতে একই সময়ে দৌড়াইতে সুরু করিলে পুনরায় ঐ স্থানে কত সময় পরে এক সঙ্গে আসিয়া পৌঁছাইবে?

23. 1000 ও 1500-এর মধ্যবর্তী কোন্ কোন্ সংখ্যার গ. সা. গু. 157?

24. ছুইটি সংখ্যার ল. সা. গু. 420 এবং গ. সা. গু. 70 হইলে ঐ সংখ্যা ছুইটি কি কি হইতে পারে?

25. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 7, 9, 14, 21 ও 35 দ্বারা ভাগ করিলে প্রতিবারই 2 ভাগশেষ থাকে কিন্তু 11 দ্বারা ভাগ করিলে কোন ভাগশেষ থাকে না?

26. সরল কর: $\dfrac{(\frac{1}{4} \text{ এর } 6\frac{2}{3}) \times (\frac{7}{8} \div 2\frac{1}{3})}{2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{2} - 5\frac{7}{8} + \frac{23}{24}}$

27. সরল কর: $\dfrac{2\frac{1}{2} - \frac{5}{8} \times 3\frac{1}{4}}{\frac{8}{25} + \frac{2}{3} \div 3^{1}}$ এর $\dfrac{7\frac{1}{9}}{4\frac{1}{6}} \div \dfrac{6{\cdot}25}{{\cdot}25}$

28. সরল কর: $\dfrac{1\frac{3}{8}}{2\frac{7}{12}}$ এর $\frac{3}{4}$ $(\frac{7}{36} + \frac{2}{3}) \div \dfrac{7\frac{1}{3}}{3}$ এর $\dfrac{\frac{3}{5}}{3\frac{1}{5}}$

29. সরল কর: $\dfrac{7\frac{1}{2}}{6\frac{1}{2}} + \dfrac{1\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}{1\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} \div \frac{13}{18}$ এর $\dfrac{1}{1 + \frac{4}{9}}$

30. $\dfrac{\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} \text{ এর } \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}} + \dfrac{\frac{1}{2} \text{ এর } \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} \text{ এর } \frac{4}{5}}{\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} \text{ এর } \frac{3}{4} \div \frac{4}{5}}$

31. $\dfrac{1\frac{3}{5}}{3\frac{1}{5}} \times \dfrac{2\frac{3}{4} \div 3\frac{2}{3}\ (4\frac{1}{7} - 2\frac{5}{14})}{2\frac{3}{4} \div 3\frac{2}{3} \times (4\frac{1}{7} - 2\frac{5}{14})} \div \dfrac{3\frac{2}{25}}{19\frac{9}{14}}$

32. সরল কর : $1 \div \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \div \cfrac{1}{2-\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1-\frac{1}{5}}}}}$

33. তোমাদের বিদ্যালয়ে মোট 832 জন ছাত্রের মধ্যে বাৎসরিক পরীক্ষায় 640 ছাত্র উত্তীর্ণ হইল। মোট ছাত্রসংখ্যার কত অংশ উত্তীর্ণ হইল ?

34. পূজার ছুটিতে তোমরা কয়েক বন্ধুতে বর্দ্ধমান জেলার একগ্রামে বেড়াইতে গেলে। যাইবার সময় গন্তব্য পথের $\frac{5}{9}$ অংশ ট্রেনে, $\frac{1}{3}$ অংশ বাসে যাওয়ার পর অবশিষ্ট 8 কিলোমিটার হাঁটিয়া গেলে। তোমাদের গন্তব্য পথের দূরত্ব কত ছিল ?

35. একজন ফল-বিক্রেতা কোন ক্রেতাকে তাহার নিকট যতগুলি আপেল ছিল তাহার $\frac{1}{4}$ অংশ বিক্রয় করিল ; অপর একজন ক্রেতাকে অবশিষ্টের $\frac{4}{5}$ অংশ বিক্রয় করিবার পরও তাহার কাছে 33টি আপেল অবশিষ্ট থাকিলে ঐ ফল-বিক্রেতার কাছে প্রথমে কয়টি আপেল ছিল ?

36. তোমার বড়দা এবং ছোড়দা একত্রে টাকা দিয়া একখানা মোটরগাড়ী ক্রয় করিল। গাড়ীখানার মোট মূল্যের $\frac{3}{5}$ অংশ বড়দা এবং বাকী অংশ ছোড়দা দিলে হিসাবে দেখা গেল ছোড়দার থেকে বড়দাকে 4500 টাকা বেশী দিতে হইল। গাড়ীটির ক্রয়মূল্য নির্ণয় কর।

37. তোমার দাদার ঘুড়ির সূতার $\frac{2}{5}$ অংশ সে তোমাকে দিয়া দিল এবং তার পরিবর্তে নূতন আরও 150 মিটার সূতা কিনিয়া অবশিষ্ট সূতার সহিত জুড়িয়া দেখিল পূর্বের সূতার $\frac{9}{10}$ অংশ হইয়াছে। তোমাকে দেওয়ার পূর্বে তোমার দাদার কত মিটার ঘুড়ির সূতা ছিল ?

38. তোমার পিতা বাড়ীতে না থাকায় তোমার মাতা একদিন কিছু টাকা দিয়া তোমাকে বাজারে পাঠাইলেন। তুমি ঐ টাকার ·4 অংশ দিয়া মাছ কিনিবার পর অবশিষ্টের ·75 অংশের দ্বারা তরি-তরকারি কিনিয়া দেখিলে তোমার কাছে 1·8 টাকা অবশিষ্ট রহিয়াছে। তোমার মাতা তোমাকে কত টাকা দিয়া বাজারে পাঠাইয়াছিলেন?

39. একটি সংখ্যার $\frac{1}{4}$ হইতে $\frac{1}{5}$ বিয়োগ করিলে বিয়োগফল ঐ সংখ্যার $\frac{1}{8}$ হইতে 15 কম হয়। সংখ্যাটি কত?

40. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি $8\frac{4}{5}$; একটি সংখ্যা অপরটির 4 গুণ হইলে সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

41. একটি ছোট চৌবাচ্চার $\frac{3}{4}$ অংশ জলে পূর্ণ ছিল; 80 লিটার জল তুলিয়া লইলে দেখা গেল চৌবাচ্চাটিতে উহার অর্দ্ধেক অপেক্ষা আরও 100 লিটার জল অধিক রহিয়াছে। চৌবাচ্চাটিতে মোট কত জল ধরে?

42. কোন বিদ্যালয়ে শিক্ষকের সংখ্যা ছাত্র ও শিক্ষকের সংখ্যার সমষ্টির $\frac{1}{25}$ অংশ। 150 জন নূতন ছাত্র ভর্তি হইলে দেখা গেল যে শিক্ষকের সংখ্যা ছাত্র ও শিক্ষকের সংখ্যার সমষ্টির $\frac{1}{30}$ অংশ হইল। ঐ বিদ্যালয়ে শিক্ষকের সংখ্যা কত?

43. উৎপাদকসাহায্যে 11025-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

44. 450-কে কোন্ লঘিষ্ঠ সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে গুণফল পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে?

45. 25920-কে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল একটি বর্গ সংখ্যা হইবে?

46. তোমাদের বিদ্যালয়ের 435 জন ছাত্রকে বর্গাকারে সাজাইতে গিয়া দেখা গেল যে 6 জন ছাত্র কম পড়িতেছে। প্রতি সারিতে কত-জন ছাত্র দাঁড় করান হইয়াছিল ?

47. দরিদ্র ছাত্র-ছাত্রীদের সাহায্যের জন্য একটি তহবিলে তোমাদের শ্রেণীর ছাত্রীরা 20 টাকা 25 পয়সা চাঁদা দিল। তোমাদের শ্রেণীতে যতজন ছাত্রী ছিল প্রত্যেকে তত পয়সা চাঁদা দিলে প্রত্যেকে কত পয়সা করিয়া চাঁদা দিয়াছিলে ?

48. একটি সমিতির সভ্যসংখ্যা যত প্রত্যেক সভ্য তত আধুলি করিয়া চাঁদা দেওয়ায় মোট 312 টা. 50 প. আদায় হইল। প্রত্যেকের চাঁদার পরিমাণ কত ?

49. দুইটি সংখ্যার গুণফল 900 এবং ভাগফল $\frac{9}{4}$ হইলে সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

[যে-কোনও দুইটি সংখ্যার গুণফলকে ঐ সংখ্যা দুইটির ভাগফল দ্বারা (যদি তাহা 1 অপেক্ষা বেশী হয়) গুণ করিলে যে-সংখ্যাটি পাওয়া যায় তাহা বৃহত্তর সংখ্যাটির বর্গের সমান হয় এবং সংখ্যা দুইটির গুণফলকে উহাদের ভাগফলের দ্বারা ভাগ করিলে যে-সংখ্যাটি পাওয়া যায় তাহা ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটির বর্গের সমান হয়।]

50. তোমাদের শ্রেণীর কয়েকজন ছাত্রীকে শ্রেণীশিক্ষিকা কলিকাতায় বিড়লা মিউজিয়াম দেখাইতে লইয়া যান। যাতায়াত এবং টিফিন বাবদ মোট 125 টাকা খরচ হইল। যতজন ছাত্রী ছিল প্রত্যেকে তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক 10 পয়সার মুদ্রা খরচ করিলে মোট কতজন ছাত্রী বেড়াইতে গিয়াছিল ?

51. কোন ব্যবসায়ী 10584 টাকা ব্যবসায়ে খাটাইয়া বৎসরান্তে 1323 টাকা লাভ করিলেন। ঐ ব্যবসায়ীর লাভের শতকরা হার নির্ণয় কর।

52. এক ব্যক্তি তাহার আয়ের 10% সঞ্চয় করেন। তাঁহার মাসিক আয় 560 টাকা হইলে প্রতি মাসে ঐ ব্যক্তি কত টাকা ব্যয় করেন?

53. নব-বারাকপুর উচ্চ বালক বিদ্যালয়ে 1974 সালে উচ্চ মাধ্যমিক পরীক্ষায় 125 জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে মাত্র 5 জন অনুত্তীর্ণ হইলে, ঐ বিদ্যালয়ের পরীক্ষার্থীদের শতকরা কতজন উত্তীর্ণ হইয়াছিল?

54. তুমি বাৎসরিক পরীক্ষায় ইংরেজীতে 68, বাংলায় 65, গণিতে 90, ইতিহাসে 66, ভূগোলে 70, বিজ্ঞানে 80 এবং সংস্কৃতে 65 নম্বর পাইলে। তুমি বাৎসরিক পরীক্ষায় শতকরা কত নম্বর পাইয়াছিলে? [প্রতি বিষয়ের পূর্ণমান 100.]

55. একখানি বাড়ী 30500 টাকায় বিক্রয় করায় 500 টাকা ক্ষতি হইল। ঐ বাড়ী 34080 টাকায় বিক্রয় করিলে কত টাকা লাভ বা ক্ষতি হইবে?

56. একজন চাউল ব্যবসায়ী প্রতি কুইণ্টাল 325 টাকা দরে 150 কুইণ্টাল চাউল ক্রয় করিয়া প্রতি কিলোগ্রাম 3 টাকা 80 পয়সা দরে বিক্রয় করিলে ঐ ব্যবসায়ীর মোট লাভের পরিমাণ কত হইবে?

57. কোন গ্রামে প্রতি বৎসর মোট লোকসংখ্যার 15% নূতন জন্মগ্রহণ করে এবং 8% লোকের প্রতি বৎসর মৃত্যু হয়। বর্তমানে ঐ গ্রামের লোকসংখ্যা 24500 জন হইলে 1 বৎসর পরে ঐ গ্রামের লোকসংখ্যা কত হইবে?

58. 10 টাকা প্রতি কিলোগ্রাম দরের 25 কিলোগ্রাম চায়ের সহিত 15 টাকা প্রতি কিলোগ্রাম দরের 15 কিলোগ্রাম চা মিশ্রিত করিয়া ঐ মিশ্রিত চায়ের প্রতি কিলোগ্রাম কি দরে বিক্রয় করিলে মোট লাভের পরিমাণ 81 টাকা হইবে?

59. কোন ব্যবসায়ী 4 মেট্রিক টন আলু হিমঘরে না রাখিয়া সাধারণ গুদামে রাখায় 8 মাস পরে দেখা গেল শুকাইয়া যাওয়ার ফলে উহার ওজন 15% কমিয়া গিয়াছে। কিন্তু বিক্রয় করিবার সময় ব্যবসায়ী দেখিল বাজারে আলুর মূল্য 25% বৃদ্ধি পাইয়াছে। যদি প্রতি কিলোগ্রাম আলুর ক্রয়মূল্য 1 টাকা হয়, তবে ঐ ব্যবসায়ীর শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইবে?

60. কোন পরীক্ষায় 60000 জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে 40% বালিকা এবং অবশিষ্ট বালক। বালকদের মধ্যে শতকরা 10 জন ও বালিকাদের মধ্যে শতকরা 8 জন পরীক্ষায় অকৃতকার্য হইল। সব মিলিয়া ঐ পরীক্ষায় শতকরা কতজন কৃতকার্য হইয়াছিল?

61. কাগজের মূল্য 200% বৃদ্ধি পাওয়ায় বর্তমানে 1200 টাকায় পূর্বাপেক্ষা 8 বেল কাগজ কম পাওয়া যায়। প্রতি দিস্তা কাগজের বর্তমান মূল্য কত? [20 দিস্তায় 1 রীম; 10 রীমে 1 বেল।]

62. একটি ঘড়ি 180 টাকায় বিক্রয় করিলে যে-ক্ষতি হয়, 255 টাকায় বিক্রয় করিলে সেই ক্ষতি পূরণ হইয়াও পূর্বক্ষতির 50% লাভ হয়। ঘড়িটির ক্রয়মূল্য কত?

63. এক রেডিও-নির্মাতা প্রতিষ্ঠান কোন ব্যবসায়ীকে 20% লাভে একটি রেডিও বিক্রয় করে এবং ঐ ব্যবসায়ী কোন ক্রেতাকে 20% লাভে উহা বিক্রয় করে। ক্রেতা যে রেডিও 720 টাকায় ক্রয় করে তাহার নির্মাণ-ব্যয় কত?

64. তুবড়ীর বারুদ প্রস্তুত করিতে 60% সোরা, 20% গন্ধক, 15% লোহাচূর ও 5% কাঠকয়লা প্রয়োজন হয়। 1 কিলোগ্রাম বারুদে 10টি তুবড়ী প্রস্তুত করা গেলে ঐরূপ 50টি তুবড়ী তৈরি করিতে সোরা, গন্ধক, লোহাচুর ও কাঠকয়লা কোন্‌টির কতটুকু প্রয়োজন?

65. একজন দালাল একটি বাড়ী বিক্রয় করিয়া নিজে $2\frac{1}{2}\%$ কমিশন কাটিয়া লইয়া বাড়ীর মালিককে 40894 টাকা দিলে ঐ দালাল বাড়ী বিক্রয় করিয়া দিবার জন্য কত কমিশন লইয়াছিল ?

66. 5টি 4 টাকা দরে কতকগুলি আম ক্রয় করিয়া এক ফল-বিক্রেতা ঐ আমগুলি 4টি 5 টাকা দরে বিক্রয় করিল। ইহাতে তাহার শতকরা কত লাভ হইল ?

67. এক ব্যক্তি টাকায় 3টি দরে 72টি ডিম কিনিল। 8টি ডিম ভাঙ্গিয়া গেল। সে বাকি ডিমগুলি টাকায় 2টি দরে বিক্রয় করিল। তাহার শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইল ?

68. এক ব্যক্তি প্রত্যেকটি 25560 টাকা দরে দুইখানা মোটর গাড়ী ক্রয় করিয়া একখানা 15% লাভে ও অপরখানি 10% ক্ষতিতে বিক্রয় করিলে মোটের উপর তাহার শতকরা কত লাভ হইল ?

69. একটি দ্রব্য উহার ধার্য্য মূল্যের $\frac{4}{5}$ মূল্যে বিক্রয় করিলে বিক্রেতার 10% ক্ষতি হয়। ধার্য্য মূল্যে বিক্রয় করিলে তাহার শতকরা কত টাকা লাভ হইবে ?

70. একটি ঘড়ি 10% লোকসানে বিক্রয় করা হইয়াছিল। যদি উহা আরও 60 টাকা অধিক মূল্যে বিক্রয় করা হইত, তবে 10% লাভ হইত। ঘড়িটির ক্রয়মূল্য কত ?

———

দ্বিতীয় অধ্যায়

[ভগ্নাংশের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.

15. ভগ্নাংশের গ. সা. গু. : একটি সংখ্যাকে অপর একটি সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে সম্পূর্ণ ভাগফল যদি একটি পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে ভাজককে ভাজ্যের গুণনীয়ক এবং ভাজ্যকে ভাজকের গুণিতক বলে। একথা পূর্ণসংখ্যা এবং ভগ্নাংশ, উভয়ের বেলাই প্রযোজ্য। যেমন, $\frac{2}{3} \div \frac{1}{9} = 6$ (পূর্ণসংখ্যা); অতএব, এক্ষেত্রে ভাজক $\frac{1}{9}$, ভাজ্য $\frac{2}{3}$-এর গুণনীয়ক এবং ভাজ্য $\frac{2}{3}$, ভাজক $\frac{1}{9}$-এর গুণিতক।

একটি ভগ্নাংশের লবের যে-কোনও একটি গুণনীয়ককে লব এবং হরের যে-কোন একটি গুণিতককে হর ধরিলে যে-সকল ভগ্নাংশ পাওয়া যায় তাহারা প্রত্যেকে প্রথমোক্ত ভগ্নাংশটির এক একটি গুণনীয়ক। যেমন—$\frac{6}{11}$-এর গুণনীয়ক $\frac{1}{11}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{1}{22}$, $\frac{3}{44}$, $\frac{3}{55}$ ইত্যাদি ; কারণ $\frac{6}{11}$-কে $\frac{1}{11}$, $\frac{2}{11}$ $\frac{3}{11}$, $\frac{1}{22}$, $\frac{3}{44}$, $\frac{3}{55}$ ইত্যাদি দ্বারা ভাগ করিলে সম্পূর্ণ ভাগফল যথাক্রমে 6, 3, 2, 12, 8, 10 ইত্যাদি পূর্ণ-সংখ্যা হয়।

দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশের বিভিন্ন গুণনীয়কের মধ্যে যে গুণনীয়কগুলি দ্বারা প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলিকে ভাগ করিলে ভাগফল অখণ্ড সংখ্যা হয়, সেই গুণনীয়কগুলিই ভগ্নাংশগুলির সাধারণ গুণনীয়ক।

একটি ভগ্নাংশের কতকগুলি গুণনীয়কের মধ্যে সেই গুণনীয়কটিই গরিষ্ঠ যাহার লব সর্বাপেক্ষা বড় এবং হর সর্বাপেক্ষা ছোট।

ইহা হইতে স্পষ্টই বুঝা যাইতেছে যে, কতিপয় ভগ্নাংশের গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক এমন একটি ভগ্নাংশ যাহার লব প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলির

লবের সাধারণ গুণনীয়কগুলির মধ্যে সর্বাপেক্ষা বড় এবং যাহার হর প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলির হরের সাধারণ গুণিতকগুলির মধ্যে সর্বাপেক্ষা ছোট। নিম্নের দৃষ্টান্তটি হইতে বিষয়টি স্পষ্ট বুঝা যাইবে। মনে করা যাউক, $\frac{4}{9}$ ও $\frac{8}{21}$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন $\frac{4}{9}$-এর গুণনীয়ক $-\dfrac{\text{4-এর যে-কোন একটি গুণনীযক}}{\text{9-এর যে-কোন একটি গুণতক}}$

$\frac{8}{21}$-এর গুণনীয়ক $=\dfrac{\text{8-এর যে-কোন একটি গুণনীয়ক}}{\text{21-এর যে-কোন একটি গুণিতক}}$

$\therefore$ $\frac{4}{9}$ ও $\frac{8}{21}$-এর সাধারণ গুণনীয়ক

$=\dfrac{\text{4 ও 8-এর একটি সাধারণ গুণনীয়ক}}{\text{9 ও 21-এর একটি সাধারণ গুণিতক}}$

$\therefore$ $\frac{4}{9}$ ও $\frac{8}{21}$-এর গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক

$=\dfrac{\text{4 ও 8-এর গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক}}{\text{9 ও 21-এর লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক}}$

$=\frac{4}{63}$.

অতএব গ. সা. গু. নির্ণয় করিবার নিয়ম—

দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশের লবগুলির গ. সা. গু.-কে হরগুলির ল. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিতে হইবে। যে ভগ্নাংশ উৎপন্ন হইবে তাহাই ঐ ভগ্নাংশগুলির গ. সা. গু. হইবে। অর্থাৎ

কতিপয় ভগ্নাংশের গ. সা. গু. $=\dfrac{\text{লবগুলির গ. সা. গু.}}{\text{হরগুলির ল. সা. গু.}}$

1 নং দ্রষ্টব্য। মিশ্র ভগ্নাংশকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া, পূর্ণ সংখ্যাগুলির নীচে 1 ধরিয়া তাহাকে ভগ্নাংশের আকারে লিখিয়া লইয়া এবং কোনও ভগ্নাংশ লঘিষ্ঠ আকারে না থাকিলে তাহাকে

লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত করিয়া পরে ভগ্নাংশগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হয়।

2 নং দ্রষ্টব্য। যে স্থলে সংখ্যাগুলি পরস্পর মৌলিক সে স্থলে 1-কেই ঐ সংখ্যাগুলির গ. সা. গু. বলিয়া ধরিতে হয়।

উদাহরণ 1. 2, $\frac{16}{14}$, $1\frac{11}{21}$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$2 = \frac{2}{1}$ [ভগ্নাংশের আকারে লেখা হইল]

$\frac{16}{14} = \frac{8}{7}$ [লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত করা হইল]

$1\frac{11}{21} = \frac{32}{21}$ [অপ্রকৃত ভগ্নাংশে পরিণত করা হইল]

এখানে 2, 8 ও 32-এর গ. সা. গু. = 2

1, 7 ও 21-এর ল. সা. গু. = 21

∴ নির্ণেয় গ. সা. গু. = $\frac{2}{21}$

যে সকল ভগ্নাংশের গ. সা. গু. স্থির করিতে হইবে তাহাদের লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিয়া লইয়া নূতন যে লবগুলি পাওয়া গেল তাহাদের গ. সা. গু.-কে ঐ ভগ্নাংশগুলির সাধারণ হরটি দ্বারা ভাগ করিয়াও ভগ্নাংশগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় করা যাইতে পারে।

উদাহরণ 2. $1\frac{7}{32}$, $1\frac{1}{8}$ ও $\frac{3}{16}$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলি যথাক্রমে $\frac{39}{32}$, $\frac{36}{32}$ ও $\frac{6}{32}$ এর সমান।

39, 36 ও 6-এর গ. সা. গু. = 3

∴ নির্ণেয় গ. সা. গু. = $\frac{3}{32}$।

প্রশ্নমালা 2

নিম্নলিখিত ভগ্নাংশগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :—

1. $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$
2. $\frac{3}{8}$, $\frac{15}{16}$
3. $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$
4. $1\frac{3}{7}$, $\frac{15}{28}$
5. $3\frac{4}{7}$, $2\frac{8}{21}$
6. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$
7. 3/[illegible], $\frac{5}{8}$, $\frac{15}{16}$
8. $\frac{4}{9}$, $2\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{3}$
9. 5, $6\frac{1}{4}$, $7\frac{6}{7}$

10. $2\frac{1}{2}, 3\frac{3}{4}, 1\frac{9}{16}$ 11. $4\frac{2}{3}, 1\frac{2}{5}, 8\frac{1}{6}$

*12. $12, 6\frac{3}{4}, 18$ *13. $1\frac{2}{13}, 2\frac{3}{26}, 1\frac{11}{39}$

*14. $11\frac{11}{15}, 10\frac{6}{25}, 1\frac{53}{75}$

*15. $\frac{1}{7}, \frac{5}{28}, \frac{6}{49}, \frac{23}{196}$ (ক. প্র. 1871)

16. কোন্ বৃহত্তম ভগ্নাংশ দ্বারা $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}$ ও $\frac{8}{9}$-কে যথাক্রমে ভাগ করিলে ভাগফল প্রতিক্ষেত্রে অখণ্ড সংখ্যা হইবে? (ঢা. বো. 1934)

17. একখানা বাটখারা দ্বারা $1\frac{1}{4}$ কি. গ্রা., $3\frac{1}{2}$ কি.গ্রা. ও $6\frac{3}{4}$ কি.গ্রা. জিনিস ওজন করা যায়। বাটখারাখানার ওজন সর্বাধিক কত হইতে পারে?

*18. কতকগুলি টালি দুই ভাগে স্তূপীকৃত করিয়া রাখা ছিল। একভাগ টালির ওজন $112\frac{1}{2}$ কি.গ্রা. এবং অপর এক ভাগের ওজন $77\frac{1}{2}$ কি. গ্রা. হইলে প্রত্যেকখানা টালির ওজন অধিক পক্ষে কত হইতে পারে?

19. কোন্ বৃহত্তম মাপকাঠি দিয়া $3\frac{3}{4}$ মি., 35 মি., $2\frac{1}{2}$ মি. ও $11\frac{1}{4}$ মি. দৈর্ঘ্য ঠিক সম্পূর্ণরূপে মাপিতে পারা যাইবে?

*20. একজন শ্রমিক কয়েকদিন কাজ করিয়া $3\frac{1}{2}$ টাকা বেতন পাইল, এবং আরও কয়েকদিন কাজ করিয়া $4\frac{1}{4}$ টাকা বেতন পাইল। প্রমাণ কর যে ঐ শ্রমিকের দৈনিক বেতন 25 পয়সার অধিক হইতে পারে না।

ভগ্নাংশের ল. সা. গু.

16. কোন ভগ্নাংশের লবের যে-কোনও গুণিতককে লব এবং হরের যে-কোনও গুণনীয়ককে হর ধরিলে যে সকল ভগ্নাংশ পাওয়া যায় তাহারা প্রত্যেকে ঐ ভগ্নাংশটির গুণিতক;

$\frac{2}{15}$-এর গুণিতক $\frac{4}{15}, \frac{8}{15}, \frac{16}{15}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}$ ইত্যাদি; কারণ ইহাদিগকে

$\frac{2}{15}$ দিয়া ভাগ করিলে সম্পূর্ণ ভাগফল যথাক্রমে 2, 4, 8, 5, 3 ইত্যাদি পূর্ণসংখ্যা হয়।

দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশের বিভিন্ন গুণিতকগুলির মধ্যে যে গুণিতকটিকে প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলির দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল প্রতিক্ষেত্রে অখণ্ড সংখ্যা হয় তাহাই ঐ ভগ্নাংশগুলির সাধারণ গুণিতক।

একটি ভগ্নাংশের কতকগুলি গুণিতকের মধ্যে সেইটিই লঘিষ্ঠ যাহার লব সর্বাপেক্ষা ছোট এবং হর সর্বাপেক্ষা বড়। সুতরাং কতিপয় ভগ্নাংশের ল. সা. গু. এমন একটি ভগ্নাংশ হইবে যাহার লব প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলির লবের সাধারণ গুণিতকগুলির মধ্যে সর্বাপেক্ষা ছোট এবং হর প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলির হরের সাধারণ গুণনীয়কগুলির মধ্যে সর্বাপেক্ষা বড়।

মনে করা যাউক, $\frac{3}{5}$ ও $\frac{12}{25}$-এর ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

$\frac{3}{5}$-এর গুণিতক $= \dfrac{\text{3-এর কোনও গুণিতক}}{\text{5-এর কোনও গুণনীয়ক}}$

$\frac{12}{25}$-এর গুণিতক $= \dfrac{\text{12-এর কোনও গুণিতক}}{\text{25-এর কোনও গুণনীয়ক}}$

$\frac{3}{5}$ ও $\frac{12}{25}$-এর সাধারণ গুণিতক =

$$\dfrac{\text{3 ও 12 এর-কোনও সাধারণ গুণিতক}}{\text{5 ও 25 এর-কোনও সাধারণ গুণনীয়ক}}$$

সুতরাং $\frac{3}{5}$ ও $\frac{12}{25}$-এর ল. সা. গু. $= \dfrac{\text{3 ও 12-এর ল. সা. গু.}}{\text{5 ও 25-এর গ. সা. গু.}}$

$$= \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

অতএব ল. সা. গু. নির্ণয়ের নিয়ম ঃ—দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশের লবগুলির ল. সা. গু.-কে হরগুলির গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিতে হইবে। যে ভগ্নাংশ উৎপন্ন হইবে তাহাই ঐ ভগ্নাংশগুলির ল. সা. গু.।

$$\text{অর্থাৎ কতিপয় ভগ্নাংশের ল. সা. গু.} = \frac{\text{লবগুলির ল. সা. গু.}}{\text{হরগুলির গ. সা. গু.}}$$

দ্রষ্টব্য। ভগ্নাংশের গ. সা. গু. নির্ণয়ের পূর্বে যেমন মিশ্র ভগ্নাংশকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশে, পূর্ণ-সংখ্যাগুলিকে ভগ্নাংশের আকারে এবং কোনও ভগ্নাংশ লঘিষ্ঠ আকারে না থাকিলে উহাকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত করিয়া লইতে হয়, ল. সা. গু. নির্ণয়ের পূর্বেও সেইরূপ করিতে হয়।

উদাহরণ 1. $5, \frac{30}{44}$ ও $1\frac{9}{11}$-এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$5 = \frac{5}{1}$; $\frac{30}{44} = \frac{15}{22}$; $1\frac{9}{11} = \frac{20}{11}$

5, 15 ও 20-এর ল. সা. গু. = 60

1, 11 ও 22-এর গ. সা. গু. = 1

∴ নির্ণেয় ল. সা. গু. $= \frac{60}{1} = 60$

ভগ্নাংশগুলিকে সাধারণ হরবিশিষ্ট করিয়া লইয়া নূতন লবগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় করিলে এবং সেই ল. সা. গু.-কে সাধারণ হরটি দিয়া ভাগ করিলেও ভগ্নাংশগুলির ল. সা. গু. নির্ণীত হইতে পারে।

উপরের উদাহরণে প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলি যথাক্রমে—

$\frac{110}{22}$, $\frac{15}{22}$ এবং $\frac{40}{22}$-এর সমান।

110, 15 ও 40-এর ল. সা. গু. = 1320

∴ নির্ণেয় ল. সা. গু. $= \frac{1320}{22} = 60$

প্রশ্নমালা 3

নিম্নলিখিত ভগ্নাংশগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় কর :—

1. $\frac{3}{5}, \frac{24}{25}$
2. $\frac{3}{4}, 2\frac{5}{8}$
3. $\frac{8}{21}, \frac{32}{49}$
4. $5\frac{1}{10}, 1\frac{2}{15}, \frac{34}{35}$
5. $\frac{8}{9}, 1\frac{23}{25}, 1\frac{5}{27}$
6. $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$

*7. $\frac{10}{3}, 2\frac{2}{39}, \frac{40}{91}$

*8. $7, 2\frac{4}{5}, 5\frac{3}{5}, 3\frac{11}{15}$

*9. $\frac{1}{7}, \frac{5}{28}, \frac{6}{49}, \frac{23}{196}$

*10. $1\frac{1}{11}, 1\frac{17}{55}, 1\frac{19}{77}$

11. এমন একটি লঘিষ্ঠ সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহাকে $4\frac{1}{2}, 5\frac{2}{5}, 6\frac{2}{3}, 7\frac{5}{7}$ দ্বারা ভাগ করিলে প্রত্যেক ভাগফল একটি পূর্ণসংখ্যা হইবে।

*12. চারিটি ঘণ্টা একবার একত্রে বাজিয়া পরে যথাক্রমে 1 সেকেণ্ড, $\frac{2}{3}$ সেকেণ্ড, $\frac{4}{5}$ সেকেণ্ড ও $\frac{8}{9}$ সেকেণ্ড অন্তর বাজিতে লাগিল। কতক্ষণ পরে ঘণ্টাগুলি পুনরায় একত্রে বাজিবে ?

*13. একখানা রথের সম্মুখের ও পশ্চাতের চাকার পরিধি যথাক্রমে $6\frac{3}{14}$ মি. ও $8\frac{1}{14}$ মি.। রথখানা অন্ততঃ কতদূর গেলে উভয় চাকা একই সময়ে পূর্ণসংখ্যকবার আবর্তন করিবে ?

*14. একটি বৃত্তাকার মাঠের চারিদিকে ঘুরিয়া আসিতে ক-এর 6 মিনিট, খ-এর $6\frac{2}{3}$ মিনিট এবং গ-এর $5\frac{5}{11}$ মিনিট সময় লাগে। মাঠটির চারিদিকে ঘুরিবার জন্য তাহারা একই সময়ে একই স্থান হইতে যাত্রা করিল এবং একই দিকে চলিতে লাগিল। যাত্রা করিবার কতক্ষণ পরে তাহারা সকলে একসঙ্গে যাত্রাস্থলে আসিয়া মিলিত হইবে ?

*15. দুইটি ভগ্নাংশের ল. সা. গু. $\frac{8}{147}$ এবং গ. সা. গু. $2\frac{2}{7}$। একটি ভগ্নাংশ $\frac{16}{49}$ হইলে অপরটি কত ?

———

দশমিক ভগ্নাংশের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.

17. দুই বা ততোধিক দশমিক ভগ্নাংশের গ.সা.গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে আবশ্যকমত শূন্য বসাইয়া প্রথমে দশমিকগুলির দশমিকাংশের অঙ্ক-সংখ্যা সমান করিয়া লইতে হয়। পরে দশমিক বিন্দুগুলি পরিত্যাগ করিয়া প্রাপ্ত অখণ্ড সংখ্যাগুলির গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হয়। সদৃশীকৃত দশমিকগুলির প্রত্যেকটিতে দশমিকাংশের অঙ্ক-সংখ্যা যত, প্রাপ্ত গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.-এর ডানদিক হইতে গণনা করিয়া তত সংখ্যক অঙ্কের বামে দশমিক বিন্দু বসাইলে যথাক্রমে নির্ণেয় গ.সা.গু. ও ল.সা.গু. পাওয়া যায়।

উদাহরণ 1. ·02, ·8 ও ·004-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$\cdot 02 = \cdot 020$$
$$\cdot 8 = \cdot 800$$
$$\cdot 004 = \cdot 004$$

এখন 20, 800 ও 4-এর গ.সা.গু. = 4

∴ নির্ণেয় গ.সা.গু. = ·004

এখানে দশমিকাংশের অঙ্ক-সংখ্যা সমান করিতে যাইয়া প্রত্যেকস্থলে দশমিক অঙ্ক-সংখ্যা তিনটি করিতে হইয়াছে, কারণ উহা অপেক্ষা অধিক সংখ্যক দশমিক অঙ্ক প্রদত্ত সংখ্যাগুলির কোনটিতে নাই। তৎপরে দশমিক বিন্দুগুলিকে তুলিয়া দিলে যে অখণ্ড সংখ্যাগুলি পাওয়া যায় তাহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করা হইয়াছে। সদৃশীকৃত দশমিকগুলিতে দশমিকাংশের অঙ্কসংখ্যা আছে 3; তাই প্রাপ্ত গ. সা.গু.-এর ডানদিক হইতে গণনা করিয়া তিন ঘর পরে দশমিক বিন্দু বসাইয়া নির্ণেয় গ.সা.গু. বাহির করা হইয়াছে।

এখানে লক্ষ্য করিতে হইবে যে 2 শতাংশ বা 20 সহস্রাংশ, 8 দশাংশ বা 800 সহস্রাংশ ও 4 সহস্রাংশের গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে

বলা হইয়াছে। আমরা প্রদত্ত সংখ্যাগুলিকে সহস্রগুণ বর্ধিত করিয়া ঐ বর্ধিত সংখ্যাগুলির অর্থাৎ 20, 800 ও 4-এর গ. সা. গু. নির্ণয় করিয়াছি বলিয়া প্রাপ্ত গ. সা. গু. 4 নির্ণেয় গ. সা. গু.-এর সহস্রগুণ হইয়াছে। অতএব 4-কে 1000 দিয়া ভাগ করিয়া নির্ণেয় গ. সা. গু. ·004 পাওয়া গিয়াছে।

এই কথাটাকেই অন্যভাবে বলিলে বলা যায় যে, 20, 800 ও 4-এর গ. সা. গু. = 4 বলিয়া 20 সহস্রাংশ, 800 সহস্রাংশ ও 4 সহস্রাংশের গ. সা. গু. 4 সহস্রাংশ বা ·004 হইবে।

দ্রষ্টব্য :—জানিয়া রাখা ভাল কতকগুলি সংখ্যাকে আমরা যদি প্রয়োজনানুরূপ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যাদ্বারা গুণ করিয়া বাড়াইয়া বা কমাইয়া লইয়া তৎপরে উহাদের গ. সা. গু. বা ল. সা. গু. নির্ণয় করি, তবে এইরূপে গুণ করিয়া লইবার ফলে সংখ্যাগুলি যে পরিমাণে বাড়ে বা কমে উহাদের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.ও সেই পরিমাণেই বৃদ্ধি বা হ্রাস পায়। বলা বাহুল্য দশমিকের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয়ের পদ্ধতিটি এই তত্ত্বের উপরই প্রতিষ্ঠিত।

উদাহরণ 2. ·05, ·025 ও 7·5-এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

·05 = ·050

·025 = ·025

7·5 = 7·500

এখন 50, 25 ও 7500-এর ল. সা. গু. = 7500

∴ নির্ণেয় ল. সা. গু. = 7·5~~00~~ = 7·5

উদাহরণ 3. 1·8, 12 ও ·24-এর গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

1·8 = 1·80

12 = 12·00

·24 = ·24

180, 1200 ও 24-এর গ. সা. গু. = 12

∴ নির্ণেয় গ. সা. গু. = ·12

180, 1200 ও 24-এর ল. সা. গু. = 3600

∴ নির্ণেয় ল. সা. গু. = 36·00 = 36

প্রশ্নমালা 4

গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর :—

1. ·4, 1·2
2. ·6, 1·8
3. ·9, 2·1
4. ·16, 2·4
5. ·36, 6·3
6. ·84, 15·6
7. ·45, 4·5
8. 3, 1·2, ·18
9. ·05, 1·5, ·025
10. ·15, 1·5, ·015
11. ·18, ·24, 3
12. 8, 7·8, 10·4
13. 3·5, ·15, ·105
14. ·2, ·45, ·6
15. ·84, 14·7, ·189
16. ·01, ·002, ·0003
*17. ·04, ·003, ·0002
18. 3·5, ·7, 4·5
19. 6·5, 1·3, 8·5
20. 1·1, ·77, 12·1
*21. 2, ·4, ·08, 1·6
*22. 2·1, ·35, ·42, 1·4
*23. ·06, 1·2, ·18, 4·8, ·72

24. 5, 1·5, 1·25, ·45, ·65
25. 2·7, 1·8, 3·6, 6
26. 4·8, ·72, ·24, 1·2
27. ·64, 1·28, 3·2, ·144
28. 8, 1·6, ·48, 3·2
29. 1·3, 6·5, ·91, 10·4
30. 7·5, 17·5, ·375, 52·5
31. 4, 6·8, ·08, ·92, ·004
32. 1·8. 7·5, 3·125, 12·5
33. 1·8, 9, 1·08, 1·44, 1·62

34. বৃহত্তম কোন্ সংখ্যাদ্বারা 2·8, ·42 ও ·084-কে ভাগ করিলে ভাগফল প্রত্যেক স্থলে পূর্ণসংখ্যা হইবে ?

35. লঘিষ্ঠ কোন্ সংখ্যাকে 3, ·09, 1·2 ও ·015 দ্বারা ভাগ করিলে প্রত্যেক ভাগফল অখণ্ড সংখ্যা হইবে ?

তৃতীয় অধ্যায়

বর্গমূল

18. উৎপাদকের সাহায্যে পূর্ণবর্গ সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করিবার প্রণালী তোমরা পূর্বেই শিখিয়াছ। প্রণালীটি উত্তম সন্দেহ নাই, কিন্তু প্রদত্ত সংখ্যাটি যদি বৃহৎ হয় কিংবা উহার মৌলিক উৎপাদকগুলি যদি বৃহৎ হয়, তবে উৎপাদকের সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয় করা কঠিন হয়। নিম্নে বর্গমূল নির্ণয়ের প্রচলিত সাধারণ প্রণালীটি বর্ণনা করা হইল।

8. **বর্গমূল নির্ণয়ের প্রচলিত নিয়ম :—**

1. প্রথমে প্রদত্ত সংখ্যাটির এককের অঙ্কের মাথায় বিন্দু বসাও। ক্রমে বামদিকে একটি অঙ্ক ছাড়িয়া একটির মাথায় বিন্দু বসাইয়া সংখ্যাটি যে কয়টি অংশে বিভক্ত হয় বিভক্ত কর। যে-কোনও পূর্ণবর্গ সংখ্যার মাথায় এইভাবে বিন্দু বসাইয়া গেলে যতগুলি অঙ্কের মাথায় বিন্দু পড়িবে সংখ্যাটির বর্গমূলে ততগুলি অঙ্ক হইবে।

2. (ক) এমন একটি গরিষ্ঠ সংখ্যা নির্ণয় কর যাহার বর্গ প্রথম অংশের সমান বা তাহার নিকটতম কিন্তু কোনও ক্রমেই তদপেক্ষা অধিক নহে।

(খ) প্রদত্ত সংখ্যাটির ডানদিকে একটি রেখা টানিয়া উহার ডান-দিকে (ঠিক ভাগ অঙ্কের বেলা যেভাবে ভাগফল লেখা হয় সেইভাবে) ঐ সংখ্যাটিকে বসাও এবং উহার বর্গ প্রদত্ত সংখ্যাটির প্রথম অংশের নীচে বসাইয়া বিয়োগ কর।

3. (ক) অতঃপর বিয়োগফলের ডানদিকে প্রদত্ত সংখ্যার দ্বিতীয় অংশটি নামাও। ইহা নূতন ভাজ্য হইল।

(খ) এই নূতন ভাজ্যের বামদিকে একটি রেখা টানিয়া ঐ রেখার বামে ডানদিকে (একটি অঙ্ক বসাইবার মত স্থান ছাড়িয়া দিয়া) লব্ধ মূলাংশের দ্বিগুণ সংখ্যা ভাজকরূপে বসাও।

(গ) নূতন ভাজ্যটির শেষ অঙ্কটি ত্যাগ করিলে যাহা থাকে তাহাকে ঐ ভাজক দ্বারা ভাগ করিয়া প্রাপ্ত ভাগফলকে লব্ধ মূলাংশের ডানদিকে এবং নূতন ভাজকটির ডানদিকে বসাও।

(ঘ) এইরূপে উৎপন্ন ভাজককে লব্ধ মূলাংশের দ্বিতীয় অঙ্কটি দ্বারা গুণ করিয়া গুণফলটিকে ভাজ্যটি হইতে বিয়োগ কর।

4. (ক) যতক্ষণ পর্যন্ত সংখ্যাটির শেষ অংশ নামান না হয় ততক্ষণ পর্যন্ত অন্যান্য অংশ পর পর নামাইয়া পূর্বের ন্যায় কার্য করিতে থাক।

(খ) সংখ্যাটি পূর্ণবর্গ হইলে শেষ অংশটি নামাইয়া কার্য করিবার পর আর কোনও অবশিষ্ট থাকিবে না।

5. এই অবস্থায় প্রদত্ত সংখ্যাটির ডানদিকে ভাগফলের ন্যায় যে সংখ্যাটি পাওয়া যাইবে উহাই নির্ণেয় বর্গমূল হইবে।

উদাহরণ 1. 119025-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

```
       1̇19̇02̇5(345
        9
 64)  290
      256
(685) 3425
      3425
```

∴ নির্ণেয় বর্গমূল = 345

প্রদত্ত সংখ্যার অঙ্কগুলির মাথায় যথারীতি বিন্দু বসাইয়া দেখা গেল সংখ্যাটি তিনটি অংশে বিভক্ত হইয়াছে। সুতরাং বুঝা গেল উহার বর্গমূল তিন অঙ্কবিশিষ্ট হইবে।

প্রদত্ত সংখ্যাটির প্রথম অংশ 11 ; 3-ই গরিষ্ঠ সংখ্যা যাহার বর্গ প্রথম অংশের অনধিক। 4-এর

বর্গ 16 ; ইহা 11 অপেক্ষা অধিক। অতএব 3-ই বর্গমূলের প্রথম অঙ্ক হইবে। 3-এর বর্গ 9, 11-এর নীচে বসাইয়া বিয়োগ করিলে বিয়োগ-ফল 2 পাওয়া গেল। ঐ 2-এর ডানদিকে সংখ্যাটির দ্বিতীয় অংশ 90 বসান হইল এবং বর্গমূল 3-এর দ্বিগুণ করিয়া ভাজক স্থানে 6 বসান হইল। নূতন ভাজ্যের ডানদিকের শূন্যটি ছাড়িয়া দিলে 29 হয় ; ইহার মধ্যে ভাজক 6, 4 বার যায়। এইজন্য 4-কে বর্গমূলের দ্বিতীয় অঙ্করূপে 3-এর ডানদিকে বসান হইল। ঐ 4-কে ভাজকের ডানদিকে বসাইলে 64 হইল। 64-কে 4 দিয়া গুণ করিয়া 256 পাওয়া গেল। তাহা 290 হইতে বিয়োগ করিলে 34 অবশিষ্ট রহিল। এই 34-এর ডানদিকে প্রদত্ত সংখ্যাটির তৃতীয় অংশ 25 নামাইলে শেষ ভাজ্যটি হইল 3425 ; 34-এর দ্বিগুণ 68-কে ভাজক স্থলে বসান হইল। 3425-এর শেষ অঙ্কটি ছাড়িয়া দিলে হয় 342 ; এখন দেখ 342-এর মধ্যে 68, 5 বার আছে। ঐ 5 বর্গমূলের তৃতীয় অঙ্করূপে 34-এর ডানদিকে এবং শেষ ভাজক 68-এর ডানদিকে বসাইয়া 685-কে ঐ 5 দ্বারা গুণ করিলে 3425 হইল। এই 3425 শেষ ভাজ্যটির নীচে বসাইয়া বিয়োগ করিলে কোনও ভাগশেষ থাকিল না এবং নির্ণেয় বর্গমূল 345 পাওয়া গেল।

ভাগ করিয়া বর্গমূলের অঙ্ক নির্ণয় করিবার সময় কোনও কোনও স্থলে দেখিতে পাওয়া যায় নির্ণীত অঙ্ক এক অঙ্কের অধিক হইয়াছে। এইরূপ স্থলে উপযুক্ত ক্ষুদ্রতর অঙ্ক বাছিয়া লইতে হয়। নিম্নে একটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

উদাহরণ 2. 38416-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

```
 3̇84̇16̇(196
 1
29)284
   261
386) 2316
     2316
```

∴ নির্ণেয় বর্গমূল = 196

284-এর 4 ছাড়িয়া দিলে থাকে 28 ; এই 28-কে 2 দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল হয় 14 কিন্তু 14 কিংবা অপর কোনও দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যাকেই বর্গমূলের অঙ্করূপে গ্রহণ করা যায় না। ভাজক 2-এর ডানদিকে সেই বৃহত্তম অঙ্কটি বসাইতে হইবে যে অঙ্কটিকে বর্গমূলের দ্বিতীয় স্থানে বসাইয়া ভাজকটিকে গুণ করিলে গুণফল 284-এর বেশী হইবে না। পরীক্ষা করিয়া দেখা গেল অঙ্কটি 9 ; সুতরাং উহাই ভাজকের ও বর্গমূলের দ্বিতীয় অঙ্ক।

ভাগের দ্বারা বর্গমূলের কোনও অঙ্ক নির্ণয় করিবার সময় যদি দেখা যায় ভাজ্য ভাজকের তুলনায় এত ছোট যে বর্গমূলের অঙ্করূপে 1 লইলেও উহা বেশী হয়, তবে ভাজকের ডানদিকে এবং লব্ধ মূলাংশের ডানদিকে একটি করিয়া শূন্য লইয়া প্রদত্ত সংখ্যাটির পরবর্তী অংশ ভাজ্যের ডানদিকে নামাইতে হয় এবং এই নূতন ভাজ্য নিয়া পূর্বের ন্যায় কাজ করিতে হয়। বুঝিবার সুবিধার জন্য নিম্নে একটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

উদাহরণ 3. 4309776-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

```
 4̇30̇97̇76̇(2076
 4
407) 3097
     2849
4146) 24876
      24876
```

∴ নির্ণেয় বর্গমূল = 2076

এখানে প্রদত্ত সংখ্যার প্রথম অংশ 4 হইতে 2-এর বর্গ 4 বিয়োগ করায় কোনও অবশিষ্ট রহিল না। প্রদত্ত সংখ্যার দ্বিতীয় অংশ 30 নামাইলে ইহাই নূতন ভাজ্য হইল। ভাজকস্থলে 2-এর দ্বিগুণ 4 বসান হইল। কিন্তু দেখা গেল, এই ভাজকের ডানদিকে এবং লব্ধ

মূলাংশ 2-এর ডানদিকে যদি 1-ও ধরা যায়, তবে $41 \times 1 = 41$, 30 অপেক্ষা বেশী হয়। তাই ভাজক 4-এর ডানদিকে এবং লব্ধ মূলাংশ 2-এর ডানদিকে 0 বসাইয়া পরবর্তী অংশ 97 নামান হইয়াছে। এখন ভাজ্য হইল 3097 ; ইহার শেষ অঙ্ক 7 ছাড়িয়া দিলে থাকে 309 ; এই 309-এর মধ্যে 40, 7 বার আছে। তাই বর্গমূলের তৃতীয় অঙ্ক-রূপে 7 লওয়া হইয়াছে।

বর্গমূল নির্ণয়ের সময় কোনও কোনও স্থলে ভাগশেষ ভাজক অপেক্ষা বৃহত্তর হইয়া থাকে। নিম্নের উদাহরণটিতে দ্বিতীয় ভাগশেষ 53, ভাজক 49 অপেক্ষা বৃহত্তর।

উদাহরণ 4. **89401**-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

```
      8̇94̇01̇(299
      4
    ------
 49)494
    441
    -------
589) 5301
     5301
    -------
```

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= 299$

$10^2 = 100 \quad \therefore \sqrt{100} = 10$

$100^2 = 10000 \quad \therefore \sqrt{10000} = 100$

$1000^2 = 1000000 \quad \therefore \sqrt{1000000} = 1000$

$10000^2 = 100000000 \quad \therefore \sqrt{100000000} = 10000$

উপরের দৃষ্টান্তগুলি হইতে আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হইতে পারি যে, পূর্ণবর্গ সংখ্যার ডানদিকে যে কয় জোড়া শূন্য থাকিবে উহার বর্গমূলে সেই কয়টি শূন্য হইবে

উদাহরণ 5. বর্গমূল নির্ণয় কর : (ক) 360000 (খ) 64000000

(ক) 360000(600
36

∴ নির্ণেয় বর্গমূল = 600

(খ) 64000000(8000
64

∴ নির্ণেয় বর্গমূল = 8000

উদাহরণ 6. নিম্নলিখিত সংখ্যা দুইটির লুপ্ত অঙ্কগুলি কি হইলে উহারা পূর্ণবর্গ হইবে নির্ণয় কর :—

(ক) 1049** (খ) 822***

(ক) 1049**(324
9
62)149
124
644) 25**
2576

∴ নির্ণেয় দশকাঙ্কটি 7 ও এককাঙ্কটি 6

এক্ষেত্রে তৃতীয় ভাজ্য 25** বর্গমূলের তৃতীয় অঙ্ক 4 লওয়ায় ভাজক 64-এর ডানদিকেও এই 4 বসাইতে হইল এবং 644 × 4 = 2576 হইল। ইহার বাম-দিকের অঙ্ক দুইটি ও তৃতীয় ভাজ্যের বামদিকের অঙ্ক দুইটি একই হইল। অতএব বুঝা গেল বর্গমূলের তৃতীয় অঙ্কটি 4-ই হইবে। সুতরাং প্রদত্ত সংখ্যাটির লুপ্ত দশকাঙ্কটি 7 এবং এককাঙ্কটি 6.

(খ) 822***(907
81
1807) 12***
12649

∴ নির্ণেয় শতকাঙ্কটি 6, দশকাঙ্কটি 4 ও এককাঙ্কটি 9

এক্ষেত্রে 82 হইতে 9-এর বর্গ 81 বিয়োগ করিলে 1 অবশিষ্ট রহিল। 1-এর ডানদিকে সংখ্যাটির দ্বিতীয় অংশ 2* নামাইলে দ্বিতীয় ভাজ্য 12* হইল। 9-এর দ্বিগুণ করিয়া ভাজক স্থানে 18 বসান হইল। এখন দ্বিতীয় ভাজ্যের তারকা-চিহ্নিত অঙ্কটি যাহাই হউক না

কেন, বর্গমূলের দ্বিতীয় অঙ্করূপে 1 লইলে 181 × 1 = 181, 12* হইতে অধিক হয়। সুতরাং বর্গমূলের দ্বিতীয় অঙ্কটি শূন্য ধরা হইল এবং ভাজক 18-এর ডানদিকেও একটি শূন্য বসান হইল। অতঃপর সংখ্যাটির তৃতীয় অংশ নামাইলে দ্বিতীয় ভাজ্য হইল 12***; এখন বর্গমূলের তৃতীয় অঙ্করূপে 7 লইয়া ভাজক 180-এর ডানদিকেও এই 7 বসাইলে 1807 × 7 = 12649 পাওয়া গেল। ইহার বামদিকের শেষ অঙ্ক দুইটি তৃতীয় ভাজ্যের বামদিকের শেষ অঙ্ক দুইটির সহিত মিলিয়া গেল। সুতরাং বুঝা গেল বর্গমূলের তৃতীয় অঙ্ক 7ই হইবে। প্রদত্ত সংখ্যাটি পূর্ণবর্গ অতএব উহার শতক, দশক ও এককের অঙ্ক তিনটি যথাক্রমে 6, 4 ও 9 হইবে।

বর্গমূল সম্পর্কিত বিবিধ প্রশ্নের সমাধান

উদাহরণ 1. 7300-এর সহিত কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যোগ করিলে যোগফল পূর্ণ বর্গসংখ্যা হইবে?

```
      73̇00̇(85
      64
165)  900
      825
       75
```

7300-এর সহিত কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যোগ করিলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে তাহাই নির্ণেয়। ইহা হইতে দুইটি জিনিস পাওয়া যায়। প্রথমতঃ যোগফলটি 7300 অপেক্ষা বৃহত্তর, দ্বিতীয়তঃ উহা 7300-এর পরবর্তী নিকটতম পূর্ণ বর্গসংখ্যা। 7300, 85-এর বর্গ অপেক্ষা বৃহত্তর। সুতরাং পরবর্তী পূর্ণ বর্গ-

সংখ্যা) $(85+1)^2$ বা 86^2 বা 7396. স্পষ্টতঃই 7300 এর সহিত কমপক্ষে $(7396-7300)=96$ যোগ করিলে যোগফল পূর্ণবর্গ হইবে। অতএব এই 96ই নির্ণেয় ক্ষুদ্রতম সংখ্যা।

উদাহরণ 2. 321576 হইতে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বিয়োগ করিলে বিয়োগফল পূর্ণবর্গসংখ্যা হইবে ?

```
     32̇15̇76̇(567
     25
 106) 715
      635
1127)  7976
       7889
         87
```

321576-এর বর্গমূল নির্ণয় করিতে গিয়া দেখা গেল 87 অবশিষ্ট রহিয়াছে।

সুতরাং 87-ই নির্ণেয় ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যাহা 321576 হইতে বিয়োগ করিলে বিয়োগফল একটি পূর্ণ বর্গসংখ্যা হইবে।

উদাহরণ 3. কোন সেনাপতি তাঁহার সৈন্যদলকে ঘন বর্গাকারে সাজাইয়া দেখিলেন 9 জন সৈন্য বেশী হইল। মোট সৈন্যসংখ্যা 335250 হইলে, প্রতি সারিতে কতজন সৈন্য ছিল ?

```
     33̇52̇41̇(579
     25
 107) 852
      749
1149) 10341
      10341
```

সৈন্যদিগকে ঘন বর্গাকারে সাজাইবার পর 9 জন সৈন্য বেশী হইল। সুতরাংমোট$(335250-9)$ জন বা 335241 জন সৈন্য দিয়া ঘন বর্গটি রচনা করা হইয়াছে।

$\therefore$ প্রতি সারির সৈন্য-সংখ্যা $=$

$\sqrt{335241}=579$

উদাহরণ 4. একদল শ্রমিক নিজেদের মধ্যে মোট 1166 টাকা

40 পয়সা চাঁদা তুলিল। তাহাদের দলে যতজন শ্রমিক ছিল প্রত্যেকে তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক পাঁচ-পয়সা মুদ্রা চাঁদা দিয়াছিল। ঐ দলে মোট কতজন শ্রমিক ছিল ?

1166 টা. 40 প. $=(1166\times20+8)$ সংখ্যক পাঁচ-পয়সা মুদ্রা।

$=23328$ সংখ্যক পাঁচ পয়সা মুদ্রা।

23328 সংখ্যক পাঁচ পয়সা $\div 2=11664$ পাঁচ-পয়সা।

ঐ শ্রমিকদলে যতজন লোক ছিল প্রত্যেকে তত পাঁচ-পয়সা চাঁদা দিলে মোট চাঁদা উঠিত 11664 সংখ্যক পাঁচ-পয়সা।

$\therefore$ চাঁদাদাতার সংখ্যা $=\sqrt{11664}=108$

```
   1̇16̇64̇(108
   1
208) 1664
     1664
```

উদাহরণ 5. বার্ষিক প্রতিষ্ঠা-দিবস উপলক্ষ্যে একটি পাঠাগারের সভ্যবৃন্দ প্রত্যেকে মোট সভ্যসংখ্যা যত তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক দশ পয়সা এবং তিনগুণ সংখ্যক দুই-পয়সা মুদ্রা ব্যয় করায় ব্যয়ের পরিমাণ দাঁড়াইল 416 টাকা। ঐ পাঠাগারের সভ্যসংখ্যা কত ? প্রত্যেক সভ্য কত ব্যয় করিয়াছিল ?

যতজন সভ্য ছিল, প্রত্যেকে তত দশ-পয়সা $\times 2+$ তত দুই পয়সা $\times 3$ অর্থাৎ তত 26 পয়সা ব্যয় করায় 416 টাকা বা 41600 পয়সা ব্যয় হইল। সুতরাং যতজন সভ্য ছিল প্রত্যেকে তত পয়সা ব্যয় করিলে ব্যয় হইত 41600 প. $\div 26=1600$ পয়সা।

$\therefore$ নির্ণেয় সভ্যসংখ্যা $= \sqrt{1600} = 40$ এবং প্রত্যেকে ব্যয় করিয়াছিল 26 পয়সা $\times 40 =$ 10 টাকা 40 পয়সা।

উদাহরণ 6. তিনটি সংখ্যার মধ্যে প্রথম ও দ্বিতীয়টির গুণফল 667, দ্বিতীয় ও তৃতীয়টির গুণফল 1073 এবং প্রথম ও তৃতীয়টির গুণফল 851 ; সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

মনে কর, সংখ্যা তিনটি ক, খ ও গ।

$\therefore$ ক $\times$ খ $= 667$; খ $\times$ গ $= 1073$; ক $\times$ গ $= 851$;

$\therefore$ ক $\times$ খ $\times$ খ $\times$ গ $\times$ ক $\times$ গ $= 667 \times 1073 \times 851$

বা, $ক^2 \times খ^2 \times গ^2 = 609053041$

```
 609053041 (24679
 4
44) 209
    176
486) 3305
     2916
4927) 38930
      34489
49349) 444141
       444141
```

বা, ক $\times$ খ $\times$ গ $= \sqrt{609053041}$

$= 24679$

এখন, $গ = \dfrac{ক \times খ \times গ}{ক \times খ} = \dfrac{24679}{667}$

$= 37$

$\therefore গ = 37$

$\therefore খ = \dfrac{খ \times গ}{গ} = \dfrac{1073}{37} = 29$

$\therefore ক = \dfrac{ক \times খ}{খ} = \dfrac{667}{29} = 23$

$\therefore$ সংখ্যা তিনটি 23, 29 ও 37

উদাহরণ 7. দুইটি সংখ্যার গুণফল 1575 এবং ভাগফাল $\frac{9}{7}$; সংখ্যা দুইটি কত ?

মনে কর, সংখ্যা দুইটির বড়টি ক ও ছোটটি খ।

```
  2025(45
  16
85) 425
    425
45) 1575 (35
    135
     225
     225
```

প্রশ্নানুসারে, $ক \times খ = 1575$

এবং $\frac{ক}{খ} = \frac{9}{7}$

$\therefore ক \times খ \times \frac{ক}{খ} = 1575 \times \frac{9}{7}$

বা, $ক^2 = 2025$

$\therefore ক = \sqrt{2025}$

$= 45$

$\therefore খ = \frac{ক \times খ}{ক} = \frac{1575}{45} = 35$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় 45 ও 35

প্রশ্নমালা 12

বর্গমূল নির্ণয় কর :—

1. 17956
2. 43681
3. 78961
4. 151321
5. 210681
6. 257049
7. 301401
8. 363609
9. 611524
10. 908209
11. 1522756 (C. U. 1922)
12. 154509
13. 2819041 (C. U. 1923)
14. 5541316
15. 57592921 (C. U. 1917)
16. 4012009
17. 9030025
18. 25070049
19. 49126081

20. 7728400 21. 24502500
22. 228010000 23. 529000000
24. 29571844 25. 184389241 (C.U. 1924)
26. 1000014129 (C. U. 1918)
27. 220191808516 (C. U. 1911)
28. 8103060289 (P. U. 1905)
29. 3136784049 (Pat. U. 1930)
30. 6256586734489 (C. U. 1910)

31. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির লুপ্ত অঙ্কগুলি কি হইলে উহারা পূর্ণবর্গ হইবে নির্ণয় কর—

(i) 672* (ii) 828* (iii) 979** (iv) 5069**

32. কোন্ সংখ্যাকে সেই সংখ্যাদ্বারা গুণ করিলে গুণফল 15864289 হইবে ?

33. দুইটি সংখ্যার গুণফল 892143 ; একটি সংখ্যা অপরটির 7 গুণ। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

34. 4016041 হইতে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বিয়োগ করিলে বিয়োগফল পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

35. 57592910-এর সহিত কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যোগ করিলে যোগফল পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

36. দুইটি সংখ্যার গুণফল 158242616 এবং বড় সংখ্যাটি ছোট সংখ্যাটির $3\frac{1}{2}$ গুণ। সংখ্যা দুইটি কত ?

37. দুইটি সংখ্যার গুণফল 6912 এবং ভাগফল $\frac{3}{4}$; সংখ্যা দুইটি কত ?

38. এক ব্যক্তির ঋণের পরিমাণ 4489 টাকা ; প্রতি মাসে কত

টাকা করিয়া ঋণ পরিশোধ করিলে তাঁহার পক্ষে প্রতি কিস্তির টাকার সংখ্যা যত, তত মাসে ঐ ঋণ পরিশোধ করা সম্ভব হইবে ?

39. একটি লেবুবাগানে লেবুগাছগুলিকে সারিবদ্ধভাবে বসান হইয়াছিল। গুণিয়া দেখা গেল ঐ বাগানে যত সারি গাছ আছে প্রত্যেক সারির গাছের সংখ্যাও তত। যদি লেবুগাছগুলির মোট সংখ্যা 390625 হয়, তবে প্রত্যেক সারিতে গাছের সংখ্যা কত ছিল নির্ণয় কর।

40. এক সেনাপতি 15400 জন সৈন্যকে নিরেট বর্গাকারে সাজাইতে গিয়া দেখিলেন 24 জন সৈন্য উদ্বৃত্ত হইয়াছে। ঐ বর্গাকারে সজ্জিত সৈন্যদলের সম্মুখ সারিতে কতজন সৈন্য ছিল ? (C. U. 1927)

41. কোন সেনাপতি তাঁহার সৈন্যদলকে ঘন বর্গাকারে সাজাইতে গিয়া দেখিলেন যে 81 জন সৈন্য কম হইতেছে। মোট সৈন্যসংখ্যা 116200 হইলে প্রতি সারিতে কতজন সৈন্য ছিল ?

42. একজন সেনাপতি তাঁহার সৈন্যদলকে সারিবদ্ধভাবে সাজাইতে গিয়া দেখিলেন প্রত্যেক সারিতে তিনি যতজন সৈন্যকে দাঁড়াইতে আদেশ দিয়াছেন ততগুলি সারিতে তাহাদিগকে দাঁড় করাইলে 69 জন সৈন্য কম পড়ে; আবার প্রতি সারির সৈন্যসংখ্যা একজন কমাইয়া দিয়া ঐ সৈন্যদিগকে নিয়া একটি পূর্ণবর্গ গঠনের চেষ্টা করিলে 4 জন সৈন্য বেশী হয়। ঐ সৈন্যদলে মোট কতজন সৈন্য ছিল ?

43. একটি সমিতির সভ্যসংখ্যা যত প্রত্যেক সভ্য তত পয়সা করিয়া চাঁদা দেওয়ায় মোট 23256 টাকা 25 পয়সা চাঁদা উঠিল। ঐ সমিতির সভ্যসংখ্যা কত ?

44. একটি বিদ্যালয়ে যত ছাত্র ছিল কোন উৎসব উপলক্ষ্যে প্রত্যেক ছাত্র তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক পয়সা ব্যয় করায় মোট ব্যয়ের

পরিমাণ দাঁড়াইল 1250 টাকা। ঐ ছাত্রদের প্রত্যেকে কত ব্যয় করিয়াছিল ?

45. একটি ছাত্রাবাসে যত ছাত্র ছিল একটি স্মৃতিরক্ষা-তহবিলে প্রত্যেকে তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক 10-পয়সা করিয়া চাঁদা দেওয়ায় মোট 1065 টাকা 80 পয়সা চাঁদা উঠিল। ঐ ছাত্রাবাসে মোট কতজন ছাত্র ছিল ?

46. একটি সমিতির সভ্যবৃন্দ মুখ্যমন্ত্রীর দেশরক্ষা-তহবিলে মোট 30375 টাকা দান করিলেন। ঐ সমিতির সভ্যসংখ্যা যত প্রত্যেক সভ্য যদি তত 25-পয়সা, তাহার দ্বিগুণ 10-দয়সা এবং তিনগুণ 5-পয়সা দান করিয়া থাকেন, তবে ঐ সমিতির মোট সভ্যসংখ্যা কত এবং ঐ সভ্যদের প্রত্যেকের দানের পরিমাণ কত নির্ণয় কর।

47. একদল যুবক স্থির করিল তাহারা নিজেদের মধ্যে চাঁদা তুলিয়া সংগৃহীত অর্থ উদ্বাস্তুদিগের সাহায্যার্থ পাঠাইবে। তাহারা হিসাব করিয়া দেখিল সংখ্যায় তাহারা যতজন প্রত্যেকে যদি তত পঁচিশ-পয়সা করিয়া চাঁদা দেয়, তবে যত টাকা উঠিবে প্রত্যেকে তত টাকা করিয়া চাঁদা দিলে তদপেক্ষা 432 টাকা বেশী চাঁদা উঠিবে। ঐ দলে কতজন যুবক ছিল ?

48. তিনটি সংখ্যার মধ্যে প্রথম ও দ্বিতীয়টির গুণফল 713, দ্বিতীয় ও তৃতীয়টির গুণফল 391 এবং তৃতীয় ও প্রথমটির গুণফল 527 হইলে সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

49. একটি বিদ্যালয়ের ছাত্রদিগকে বর্গাকারে সাজান যায় আবার তাহাদিগকে 25, 30, 45 সারিতেও সাজান যায়। ঐ বিদ্যালয়ে কমপক্ষে কত ছাত্র আছে ?

50. ক ও খ-এর বয়সের সংখ্যার গুণফল 551, খ ও গ-এর বয়সের সংখ্যার গুণফল 1073 এবং ক ও গ-এর বয়সের সংখ্যার গুণফল 703 হইলে কাহার বয়স কত ?

চতুর্থ অধ্যায়

সময় ও কার্য্যবিষয়ক প্রশ্নের সমাধানে ঐকিক নিয়মের প্রয়োগ।

ঐকিক নিয়ম কাহাকে বলে তোমরা জান। ঐকিক নিয়মে ইতিপূর্ব্বে তোমরা শতকরা হার ও লাভ-ক্ষতি বিষয়ক প্রশ্নাবলীর সমাধান কিরূপে করিতে হয় তাহা শিখিয়াছ। এই অধ্যায়ে ঐকিক নিয়মে সময় ও কার্য্য বিষয়ক প্রশ্নাবলীর সমাধান করিবার প্রণালী প্রদর্শিত হইবে।

সময় ও কার্য্য বিষয়ক প্রশ্নাবলীর সমাধান করিবার সময় নিম্নলিখিত বিষয়গুলি মনে রাখিতে হইবে।

(ক) বিভিন্ন লোক একই সময়ে (প্রশ্নের প্রকৃতি অনুযায়ী একদিনে, এক ঘণ্টায় বা একমিনিটে) কতটা কাজ সম্পন্ন করিতে পারে সর্ব্বাগ্রে উহার পরিমান নির্ণয় করিয়া লইতে হয়।

(খ) 1 জন লোক কোন ও নির্দিষ্ট সময়ে যে কাজ করিতে পারে সেই নির্দিষ্ট সময়ে 2 জন লোক তাহার দ্বিগুণ, 3 জন লোক তাহার তিনগুণ, 4 জন লোক তাহার চতুর্গুণ কাজ করিতে পারে। আবার কোন ও নির্দিষ্ট সময়ে 5 জন লোক যে কাজ করিতে পারে, 1 জন লোক সেই সময়ে সেই কাজের $\frac{1}{5}$ অংশ করিতে পারে।

(গ) কাজ করিবার লোক যতগুণ বৃদ্ধি পায়, কাজ করিবার সময় ঠিক ততভাগ হ্রাস পায়। 10 জন লোক যে-কাজ 4 দিনে করিতে পারে, 20 জন লোক সেই কাজ 2 দিনে, 40 জন লোক সেই কাজ 1 দিনে করিতে পারে।

(ঘ) লোক-সংখ্যা অপরিবর্ত্তিত থাকিলে কাজ যতগুণ বৃদ্ধি পাইবে সময় ও ততগুণ বেশী লাগিবে।

(ঙ) কোন ও লোক একটি কাজের $\frac{1}{3}$ অংশ 1 দিনে সম্পন্ন করিতে পারিলে সম্পূর্ণ কাজ শেষ করিতে তাহার ($1 \div \frac{1}{3}$) দিন বা 3 দিন সময় লাগিবে। আবার বিপরীতক্রমে যদি কোন ও লোক 5 দিনে একটি কাজ সম্পন্ন করিতে পারে তবে 1 দিনে সেই লোক সেই কাজের $\frac{1}{5}$ অংশ সম্পন্ন করিবে।

(চ) 4 জন লোক 5 দিনে যে কাজ করিতে পারে, 1 জন লোক সেই কাজ (4×5) দিনে বা 20 দিনে করিতে পারে। 3 জন লোক যে কাজ 10 দিনে করিতে পারে, 1 জন লোক সেই কাজ (3×10) দিনে বা 30 দিনে করিতে পারে।

(ছ) যদি একটি কাজ ক 6 দিনে, খ 10 দিনে ও গ 15 দিনে করিতে পারে তবে ক, খ ও গ একত্রে 1 দিনে ঐ কাজের $(\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15})$ অংশ করিতে পারে এবং সমস্ত কাজটি ঐ তিনজনে একত্রে $1 \div (\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15})$ দিনে বা 3 দিনে করিতে পারে।

ঐকিক নিয়মের সাহায্যে সময় ও কার্য্য-বিষয়ক প্রশ্ন সমাধানের প্রক্রিয়া নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ দিয়া প্রদর্শিত হইল।

উদাহরণ 1. একটি কাজ ক 6 দিনে এবং খ 12 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। উভয়ে একত্রে কতদিনে কাজটি সম্পন্ন করিতে পারিবে ?

ক 6 দিনে সম্পূর্ণ কাজটি করিতে পারে,

∴ ক 1 দিনে করিতে পারে কাজটির $\frac{1}{6}$ অংশ।

খ 12 দিনে সম্পূর্ণ কাজটি করিতে পারে,

∴ খ 1 দিনে করিতে পারে কাজটির $\frac{1}{12}$ অংশ।

∴ ক ও খ একত্রে 1 দিনে করিতে পারে কাজটির $(\frac{1}{6} + \frac{1}{12})$ অংশ বা $\frac{1}{4}$ অংশ

$\therefore$ ক ও খ সম্পূর্ণ কাজটি $(1 \div \frac{1}{4})$ দিনে বা 4 দিনে সম্পন্ন করিবে।

উদাহরণ 2. একজন বয়স্ক লোক একটি কাজ 60 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। একটি বালকের সাহায্য লইয়া সে 36 দিনে কাজটি সম্পন্ন করিল। বালকটি একা কতদিনে কাজটি সম্পন্ন করিতে পারিত ?

বয়স্ক লোকটি 60 দিনে কাজটি সম্পন্ন করিতে পারে,

$\therefore$ সে 1 দিনে করিতে পারে কাজটির $\frac{1}{60}$ অংশ।

একটি বালকের সাহায্য লইয়া বয়স্ক লোকটি 36 দিনে কাজটি সম্পন্ন করিয়াছে।

$\therefore$ উভয়ে 1 দিনে করিয়াছে কাজটির $\frac{1}{36}$ অংশ

$\therefore$ বালকটি 1 দিনে করিয়াছে সম্পূর্ণ কাজের $(\frac{1}{36} - \frac{1}{60})$ অংশ বা $\frac{1}{90}$ অংশ।

$\therefore$ একা কাজ করিলে বালকটি সম্পূর্ণ কাজ $(1 \div \frac{1}{90})$ দিনে বা 90 দিনে সম্পন্ন করিতে পারিত।

উদাহরণ 3. একটি কাজ ক ও খ 10 দিনে, ক ও গ 12 দিনে এবং খ ও গ 20 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। পৃথক্ পৃথক্‌ভাবে কাজ করিলে কে কতদিনে কাজটি সম্পন্ন করিতে পারিবে ?

ক ও খ 10 দিনে একটি কাজ সম্পন্ন করিতে পারে,

$\therefore$ ক ও খ 1 দিনে করিতে পারে সম্পূর্ণ কাজের $\frac{1}{10}$ অংশ।

ক ও গ 12 দিনে ঐ কাজটি সম্পন্ন করিতে পারে,

$\therefore$ ক ও গ 1 দিনে করিতে পারে সম্পূর্ণ কাজের $\frac{1}{12}$ অংশ।

খ ও গ 20 দিনে ঐ কাজটি সম্পন্ন করিতে পারে,

$\therefore$ খ ও গ 1 দিনে করিতে পারে সম্পূর্ণ কাজের $\frac{1}{20}$ অংশ।

∴ 2(ক+খ+গ) 1 দিনে করিতে পারে সম্পূর্ণ কাজের

$(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20})$ অংশ $=\frac{7}{30}$ অংশ

∴ (ক+খ+গ) 1 দিনে করিতে পারে সম্পূর্ণ কাজের $(\frac{7}{30}\div 2)$ অংশ বা $\frac{7}{60}$ অংশ।

∴ ক 1 দিনে করিতে পারে $(\frac{7}{60}-\frac{1}{20})$ অংশ বা $\frac{1}{15}$ অংশ,

খ 1 দিনে করিতে পারে $(\frac{7}{60}-\frac{1}{12})$ অংশ বা $\frac{1}{30}$ অংশ,

এবং গ 1 দিনে করিতে পারে $(\frac{7}{60}-\frac{1}{10})$ অংশ বা $\frac{1}{60}$ অংশ।

∴ পৃথক্ পৃথক্ কাজ করিলে ক $(1\div\frac{1}{15})$ দিনে বা 15 দিনে, খ $(1\div\frac{1}{30})$ দিনে বা 30 দিনে এবং গ $(1\div\frac{1}{60})$ দিনে বা 60 দিনে সম্পূর্ণ কাজটি সম্পন্ন করিতে পারিবে।

উদাহরণ 4. একটি কাজ ক 10 দিনে, খ 15 দিনে এবং গ 20 দিনে করিতে পারে। তাহারা একত্রে কাজ আরম্ভ করিল কিন্তু কাজ আরম্ভ করিবার 2 দিন পরে ক এবং কাজটি শেষ হইবার 2 দিন পূর্বে খ চলিয়া গেল। কাজটি শেষ হইতে মোট কতদিন সময় লাগিয়াছিল ?

প্রশ্নানুসারে, প্রথম 2 দিন ক, খ ও গ একত্রে, শেষ 2 দিন গ একা এবং অন্তর্বর্তী কয়েকটি দিন খ ও গ একত্রে কাজ করিয়াছে।

ক, খ ও গ 1 দিনে সম্পূর্ণ কাজের যথাক্রমে $\frac{1}{10}$ অংশ, $\frac{1}{15}$ অংশ ও $\frac{1}{20}$ অংশ সম্পন্ন করিতে পারে।

∴ একত্র কাজ করিলে ক, খ ও গ 1 দিনে করিতে পারে সম্পূর্ণ কাজের $(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20})$ অংশ বা $\frac{13}{60}$ অংশ

∴ প্রথম 2 দিনে তাহারা সম্পূর্ণ কাজের $(\frac{13}{60}\times 2)$ অংশ বা $\frac{13}{30}$ অংশ সম্পন্ন করিয়াছে।

শেষ 2 দিনে গ একা সম্পূর্ণ কাজের $(\frac{1}{20}\times 2)$ অংশ বা $\frac{1}{10}$ অংশ সম্পন্ন করিয়াছে।

$\therefore$ প্রথম 2 দিন ও শেষ 2 দিনে সম্পূর্ণ কাজের $(\frac{13}{30}+\frac{1}{10})$ অংশ বা $\frac{8}{15}$ অংশ সম্পন্ন হইয়াছে। অবশিষ্ট $(1-\frac{8}{15})$ অংশ বা $\frac{7}{15}$ অংশ খ ও গ একত্র সম্পন্ন করিয়াছে।

খ ও গ একত্রে 1 দিনে করিতে পারে সম্পূর্ণ কাজের $(\frac{1}{15}+\frac{1}{20})$ অংশ বা $\frac{7}{60}$ অংশ

$\therefore$ সম্পূর্ণ কাজের $\frac{7}{15}$ অংশ সম্পন্ন করিতে তাহাদের সময় লাগিয়াছে $(\frac{7}{15}\div\frac{7}{60})$ দিন বা 4 দিন।

$\therefore$ কাজটি শেষ হইতে মোট $(2+4+2)$ দিন বা 8 দিন সময় লাগিয়াছিল।

উদাহরণ 5. একটি চৌবাচ্চায় দুইটি নল যুক্ত আছে। একটি নল দিয়া 3 ঘণ্টায় খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়; অপর নলটি দিয়া 4 ঘণ্টায় পূর্ণ চৌবাচ্চাটি খালি হয়। দুইটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইতে কত সময় লাগিবে?

প্রথম নলটি দিয়া 1 ঘণ্টায় খালি চৌবাচ্চাটির $\frac{1}{3}$ অংশ পূর্ণ হয়,

দ্বিতীয় নলটি দিয়া 1 ঘণ্টায় পূর্ণ চৌবাচ্চাটির $\frac{1}{4}$ অংশ খালি হয়।

$\therefore$ দুইটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে 1 ঘণ্টায় খালি চৌবাচ্চাটির $(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})$ অংশ বা $\frac{1}{12}$ অংশ পূর্ণ হয়।

$\therefore$ দুইটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে সম্পূর্ণ চৌবাচ্চাটি $(1\div\frac{1}{12})$ ঘণ্টায় বা 12 ঘণ্টায় পূর্ণ হইবে।

উদাহরণ 6. একটি চৌবাচ্চায় দুইটি নল সংযুক্ত আছে। একটি নল দিয়া 12 মিনিটে এবং অপর নল দিয়া 18 মিনিটে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়। দুইটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিবার কতক্ষণ পরে প্রথম নলটি বন্ধ করিয়া দিলে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইতে আর 3 মিনিট সময় লাগিবে?

প্রশ্নানুসারে, শেষ 3 মিনিট দ্বিতীয় নলটি খোলা থাকিবে।

দ্বিতীয় নলটি 1 মিনিটে চৌবাচ্চাটির $\frac{1}{18}$ অংশ পূর্ণ করে,

∴ দ্বিতীয় নলটি 3 মিনিটে চৌবাচ্চাটির $(\frac{1}{18}\times3)$ অংশ বা $\frac{1}{6}$ অংশ পূর্ণ করিবে।

অবশিষ্ট $(1-\frac{1}{6})$ অংশ বা $\frac{5}{6}$ অংশ দুইটি নল একত্রে পূর্ণ করিবে।

নল দুইটি 1 মিনিটে পূর্ণ করে চৌবাচ্চাটির $(\frac{1}{12}+\frac{1}{18})$ অংশ বা $\frac{5}{36}$ অংশ

∴ নল দুইটি চৌবাচ্চাটির $\frac{5}{6}$ অংশ পূর্ণ করিবে $(\frac{5}{6}\div\frac{5}{36})$ মিনিটে বা 6 মিনিটে

∴ নল দুইটি খুলিয়া দিবার 6 মিনিট পরে প্রথম নলটি বন্ধ করিয়া দিলে আর 3 মিনিট সময়ে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইবে।

উদাহরণ 7. একটি চৌবাচ্চায় 3টি নল আছে। প্রথম দুইটি নল যথাক্রমে 3 ঘণ্টা ও 4 ঘণ্টা 30 মিনিটে খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করিতে পারে ; তৃতীয় নলটি 1 ঘণ্টা 30 মিনিটে পূর্ণ চৌবাচ্চাটি খালি করিতে পারে। তিনটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে পূর্ণ চৌবাচ্চাটি জলশূন্য হইতে কত সময় লাগিবে ?

প্রথম নলটি 3 ঘণ্টায় খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করে।

∴ প্রথম নলটি 1 ঘণ্টায় চৌবাচ্চাটির $\frac{1}{3}$ অংশ পূর্ণ করে।

দ্বিতীয় নলটি $4\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করে।

∴ দ্বিতীয় নলটি 1 ঘণ্টায় চৌবাচ্চাটির $\frac{2}{9}$ অংশ পূর্ণ করে।

∴ প্রথম দুইটি নল 1 ঘণ্টায় চৌবাচ্চাটির $(\frac{1}{3}+\frac{2}{9})$ অংশ বা $\frac{5}{9}$ অংশ পূর্ণ করে।

তৃতীয় নলটি $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় পূর্ণ চৌবাচ্চাটি খালি করে।

∴ 1 ঘণ্টায় পূর্ণ চৌবাচ্চাটির $\frac{2}{3}$ অংশ খালি করে।

∴ তিনটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে 1 ঘণ্টায় পূর্ণ চৌবাচ্চাটির $(\frac{2}{3}-\frac{5}{9})$ অংশ বা $\frac{1}{9}$ অংশ খালি হয়।

∴ তিনটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে পূর্ণ চৌবাচ্চাটি খালি হইতে $(1 \div \frac{1}{9})$ ঘণ্টা বা 9 ঘণ্টা সময় লাগিবে।

প্রশ্নমালা 13

1. ক একটি কাজ 10 দিনে এবং খ 15 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। তাহারা একত্রে কতদিনে ঐ কাজটি সম্পন্ন করিতে পারিবে?

2. ক ও খ একটি কাজ 8 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। ক একাকী ঐ কাজটি 12 দিনে সম্পন্ন করিতে পারিলে খ একাকী কতদিনে উহা সম্পন্ন করিতে পারিবে?

3. যে-কাজটি ক একাকী $4\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় সম্পন্ন করিতে পারিত খ-এর সাহায্য লইয়া সেই কাজটি সে 3 ঘণ্টায় সম্পন্ন করিল। একা কাজ করিলে কাজটি সম্পন্ন করিতে খ-এর কত সময় লাগিত?

4. একটি কাজ ক 10 দিনে, খ 15 দিনে এবং গ 30 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। তাহারা একত্রে ঐ কাজ কতদিনে সম্পন্ন করিবে?

5. একটি কাজ ক ও খ 10 দিনে, খ ও গ 15 দিনে এবং ক ও গ 12 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। ক, খ ও গ একত্র কাজ করিলে কাজটি কতদিনে সম্পন্ন হইবে?

6. একটি কাজ ক ও খ 15 দিনে, খ ও গ 20 দিনে এবং ক ও গ 12 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। পৃথক্ পৃথক্‌ভাবে কাজ করিলে কাজটি কে কতদিনে সম্পন্ন করিতে পারিবে?

7. ক একটি কাজ 6 দিনে এবং খ 9 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে।

গ-এর সাহায্য লইয়া তাহারা কাজটি 3 দিনে সম্পন্ন করিল। গ একাকী কতদিনে কাজটি সম্পন্ন করিতে পারে ?

8. ক 8 দিনে, খ 10 দিনে এবং গ 24 দিনে একটি কাজ করিতে পারে। তাহারা একত্রে উহা কতদিনে করিবে এবং প্রত্যেকে কাজের কত অংশ করিবে ?

9. ক একটি কাজের $\frac{2}{5}$ অংশ 6 দিনে করিয়া অবশিষ্টাংশ খ-এর সাহায্যে 4 দিনে শেষ করিল। খ একা কাজটি কতদিনে করিতে পারিত ?

10. ক $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় একটি কাজের $\frac{1}{4}$ অংশ, খ $3\frac{3}{4}$ ঘণ্টায় অবশিষ্ট কাজের $\frac{1}{6}$ অংশ, গ $9\frac{3}{8}$ ঘণ্টায় কাজটির অবশিষ্ট অংশ সম্পন্ন করিল। একত্র কাজ করিলে সম্পূর্ণ কাজটি করিতে তাহাদের কত সময় লাগিত ?

11. একটি কাজ ক ও খ 10 দিনে, খ ও গ 15 দিনে এবং ক, খ ও গ একত্রে 8 দিনে করিতে পারে। ক ও গ উহা কতদিনে করিতে পারিবে ?

12. ক একটি কাজ 15 দিনে এবং খ 9 দিনে করিতে পারে। তাহারা একত্রে 3 দিন কাজ করার পর খ চলিয়া গেল। ক আর কতদিনে কাজটি শেষ করিবে ?

13. একটি কাজ ক 6 দিনে এবং খ 12 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। খ কাজ আরম্ভ করিবার 3 দিন পরে ক কাজে যোগদান করিল এবং উভয়ে মিলিয়া কাজটি সম্পন্ন করিল। কাজটি শেষ হইতে মোট কতদিন লাগিয়াছিল ?

14. ক একটি কাজ 8 দিনে এবং খ 12 দিনে করিতে পারে। উভয়ে একত্রে কাজটি আরম্ভ করিল কিন্তু কাজ শেষ হইবার 2 দিন পূর্বে ক চলিয়া গেল। কাজটি কতদিনে শেষ হইয়াছিল ?

15. ক, খ ও গ একটি কাজ 8 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। আবার, ক একা ঐ কাজ 16 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। তিনজনে 4 দিন একসঙ্গে কাজ করিবার পর ক চলিয়া গেল। বাকি কাজ খ ও গ একত্রে কতদিনে সমাধা করিবে ?

16. একটি কাজ ক 20 দিনে, খ 30 দিনে এবং গ 40 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। তাহারা তিনজনে কাজটি আরম্ভ করিল কিন্তু কাজটি আরম্ভ হইবার 4 দিন পরে ক এবং কাজটি শেষ হইবার 4 দিন পূর্বে খ চলিয়া গেল। কাজটি শেষ হইতে মোট কতদিন লাগিয়াছিল ?

17. একটি খালি চৌবাচ্চা দুইটি নলের দ্বারা যথাক্রমে 3 ও 5 ঘণ্টায় পূর্ণ হয়। উভয় নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইতে কত সময় লাগিবে ?

18. একটি খালি চৌবাচ্চা একটি নলের দ্বারা 4 ঘণ্টায় পূর্ণ হয় এবং অপর একটি নলের দ্বারা পূর্ণ চৌবাচ্চাটি 5 ঘণ্টায় খালি হয়। জলশূন্য চৌবাচ্চাটিতে দুইটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে উহা পূর্ণ হইতে কত সময় লাগিবে ?

19. একটি চৌবাচ্চায় তিনটি নল সংলগ্ন আছে। প্রথম দুইটি নলের দ্বারা যথাক্রমে 2 ও 3 ঘণ্টায় খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয় এবং তৃতীয় নলের দ্বারা পূর্ণ চৌবাচ্চাটি 6 ঘণ্টায় খালি হয়। তিনটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে কত সময়ে খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইবে ?

20. একটি চৌবাচ্চা একটি নলের দ্বারা 30 মিনিটে পূর্ণ হয় এবং অপর একটি নলের দ্বারা পূর্ণ চৌবাচ্চাটি 20 মিনিটে খালি হয়। জলপূর্ণ চৌবাচ্চাটিতে একসঙ্গে দুইটি নল খুলিয়া দিলে উহা খালি হইতে কত সময় লাগিবে ?

21. একটি চৌবাচ্চায় দুইটি নল সংলগ্ন আছে। নল দুইটি

একসঙ্গে খুলিয়া দিলে চৌবাচ্চাটি 2 ঘণ্টা 30 মিনিটে পূর্ণ হয় এবং কেবলমাত্র দ্বিতীয় নলটি খুলিয়া দিলে 3 ঘণ্টা 45 মিনিটে পূর্ণ হয়। দ্বিতীয় নলটিকে বন্ধ রাখিয়া কেবলমাত্র প্রথম নলটি খুলিয়া দিলে খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইতে কত সময় লাগিবে ?

22. একটি চৌবাচ্চায় তিনটি নল আছে। প্রথম নলটি দিয়া চৌবাচ্চাটি 8 মিনিটে পূর্ণ হয়। দ্বিতীয় ও তৃতীয় নলটি দিয়া চৌবাচ্চাটি যথাক্রমে 12 ও 16 মিনিটে খালি হইয়া যায়। তিনটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে পূর্ণ চৌবাচ্চাটি খালি হইতে কত সময় লাগিবে ?

23. কোন চৌবাচ্চা একটি নলদ্বারা 30 মিনিটে পূর্ণ হয় এবং অপর একটি নলদ্বারা 20 মিনিটে খালি হয়। চৌবাচ্চাটির $\frac{3}{4}$ অংশ জলে পূর্ণ আছে। এখন দুইটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে কতক্ষণে চৌবাচ্চাটি জলশূন্য হইবে ?

24. একটি চৌবাচ্চায় দুইটি নল সংযুক্ত আছে। নল দুইটি এক-সঙ্গে খুলিয়া দিলে খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইতে 36 মিনিট সময় লাগে। শেষের 10 মিনিট কেবলমাত্র প্রথম নলটি খোলা থাকিলে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইতে 40 মিনিট সময় লাগে। প্রথম নলটি বন্ধ রাখিয়া কেবলমাত্র দ্বিতীয় নলটি খুলিয়া দিলে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইতে কত সময় লাগিবে ?

25. একটি চৌবাচ্চা দুইটি নলদ্বারা যথাক্রমে 25 ও 35 মিনিটে পূর্ণ হয়। নল দুইটি একসঙ্গে খুলিয়া দিয়া কতক্ষণ পরে প্রথম নলটি বন্ধ করিয়া দিলে আর 5 মিনিটে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইবে ?

পঞ্চম অধ্যায়

সরল কুসীদ বা সুদকষা

20. যে ব্যক্তি টাকা ধার দেন তাঁহাকে উত্তমর্ণ এবং যিনি টাকা ধার নেন তাঁহাকে অধমর্ণ বলে। উত্তমর্ণের নিকট হইতে টাকা ধার পাওয়ায় অধমর্ণের যে উপকার হয় তাহার বিনিময়ে ঐ টাকা পরিশোধের সময় অধমর্ণ উত্তমর্ণকে কিছু অতিরিক্ত টাকা দিয়া থাকেন। যে টাকা ধার লওয়া হয় তাহাকে আসল বা মূলধন এবং মূলধনের অতিরিক্ত যে টাকা উত্তমর্ণকে দেওয়া হয় তাহাকে ঐ মূলধনের কুসীদ বা সুদ বলা হয়। সুদ ও আসলের সমষ্টিকে সবৃদ্ধিমূল বা সুদ-আসল বা সুদমূল বলে।

অতএব, সবৃদ্ধিমূল = আসল + সুদ

আসল = সবৃদ্ধিমূল − সুদ

সুদ = সবৃদ্ধিমূল − আসল

কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকার উপরে কোন নির্দিষ্ট সময়ের সুদকে সুদের হার বলে। এই সুদের হার প্রতি টাকায় মাসিক বা বার্ষিক হিসাবে অথবা প্রতি 100 টাকায় মাসিক বা বার্ষিক হিসাবে ধরা হইয়া থাকে। যদি প্রতি টাকায় প্রতি মাসে 3 পয়সা করিয়া সুদ দিতে হইবে এইরূপ সর্ত্তে টাকা ধার করা হয়, তবে 'প্রতি টাকায় মাসিক 3 পয়সা হার সুদে' টাকা ধার করা হইয়াছে বলা হয়। আবার যদি প্রতি 100 টাকার জন্য বার্ষিক 6 টাকা করিয়া সুদ দিবার অঙ্গীকার করা হইয়া থাকে, তবে 'শতকরা বার্ষিক 6 টাকা হার সুদে' টাকা ধার করা হইয়াছে বলা হয়। কখনও কখনও 'বার্ষিক' কথাটির উল্লেখ থাকে না। 'শতকরা হার' বলিলেই 'শতকরা বার্ষিক হার' বুঝিয়া নিতে হয়।

নির্দ্দিষ্ট হার সুদে কোনও নির্দ্দিষ্ট পরিমাণ টাকার নির্দ্দিষ্ট সময়ের সুদ নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকে সুদকষা বলে।

সুদ দুই প্রকার—সরল সুদ ও মিশ্র সুদ বা চক্রবৃদ্ধি।

যখন কেবল গোড়ায় ধার নেওয়া আসল টাকারই সুদ কষা হয় তখনই সেই সুদকে সরল সুদ বলে। সরল সুদের বেলা আসল টাকার কোনও পরিবর্ত্তন হয় না। প্রতি বৎসর সুদের পরিমাণ বাড়িয়া চলে। দুই, তিন, চার বা পাঁচ বৎসরের সরল সুদ, এক বৎসরের সুদের দুই, তিন, চার বা পাঁচগুণ হইয়া থাকে।

যদি বৎসরান্তে সুদ পরিশোধ করা না হয়, তবে কোন কোন ক্ষেত্রে ঐ সুদ আসলের সঙ্গে যুক্ত হইয়া যে সবৃদ্ধিমূল হয় তাহাই পরবর্তী বৎসরের আসল বলিয়া গণ্য হয় এবং তাহার উপরই সুদের হিসাব কষা হয়। এক্ষেত্রে পরবর্তী বৎসরের আসল পূর্ববর্তী বৎসরের আসল অপেক্ষা অধিক বলিয়া পরবর্তী বৎসরের সুদও পূর্ববর্তী বৎসরের সুদ অপেক্ষা অধিক হইয়া থাকে। এইভাবে যে সুদের হিসাব কষা হয় তাহাকে **চক্রবৃদ্ধি** বলে।

সুদ বলিলে তাই সরল সুদই বুঝিতে হয়। এই অধ্যায়ে আমরা সরল সুদেরই আলোচনা করিব, চক্রবৃদ্ধির নহে।

21. সুদ ও সবৃদ্ধিমূল নির্ণয়

(ক) মাসিক সুদের হার হইতে সুদ ও সবৃদ্ধিমূল নির্ণয়—

উদাহরণ 1. প্রতি টাকায় মাসিক সুদ 6 পয়সা হইলে 10 মাসে 125 টাকার সবৃদ্ধিমূল কত হইবে ?

1 টাকার 1 মাসের সুদ = 6 পয়সা

∴ 125 ,, 1 ,, ,, = (6×125) প.

∴ 125 ,, 10 ,, ,, = $(6 \times 125 \times 10)$ প.

= 7500 প.

= 75 টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় সবৃদ্ধিমূল = 125 টাকা + 75 টাকা = 200 টাকা।

উদাহরণ 2. শতকরা মাসিক $1\frac{1}{2}$ টাকা হার সুদে 625 টাকার 3 বৎসর 4 মাসের সুদ কত ?

3 বৎসর 4 মাস = 40 মাস

100 টাকার 1 মাসের সুদ = $\frac{3}{2}$ টাকা

$\therefore$ 1 ,, 1 ,, ,, = $\frac{3}{2 \times 100}$ টাকা

$\therefore$ 625 ,, 1 ,, ,, = $\frac{3 \times 625}{2 \times 100}$ টাকা

$\therefore$ 625 ,, 40 ,, ,, = $\frac{3 \times 625 \times 40}{2 \times 100}$ টাকা

= 375 টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় সুদ = 375 টাকা

লক্ষ্য কর, সুদের শতকরা হার দেওয়া থাকিলে নির্ণেয় সুদ

$$= \frac{\text{আসল} \times \text{সময়} \times \text{হার}}{100}$$

(খ) বার্ষিক সুদের হার হইতে সুদ ও সবৃদ্ধিমূল নির্ণয়—

উদাহরণ 1. প্রতি টাকায় বার্ষিক সুদ 10 প. হইলে 200 টাকার 2 বৎসর 6 মাসের সুদ কত ?

2 বৎসর 6 মাস = $2\frac{1}{2}$ বৎসর = $\frac{5}{2}$ বৎসর।

1 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 10 পয়সা

$\therefore$ 200 ,, 1 ,, ,, = (10×200) পয়সা

$\therefore$ 200 ,, $\frac{5}{2}$,, ,, = $\frac{10 \times 200 \times 5}{2}$ পয়সা

= 5000 পয়সা

= 50 টাকা।

[বার্ষিক সুদের হার দেওয়া থাকায় এক্ষেত্রে 2 বৎসর 6 মাসকে বৎসরে পরিণত করা হইয়াছে।]

উদাহরণ 2. 5% হার সুদে 1000 টাকার 73 দিনের সবৃদ্ধিমূল কত ?

$$73 \text{ দিন} = \frac{73}{365} \text{বৎসর} = \frac{1}{5} \text{ বৎসর}$$

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 5 টাকা

$\therefore$ 100 " $\frac{1}{5}$ " " $= \frac{5 \times 1}{5}$ টাকা

$\therefore$ 1 " $\frac{1}{5}$ " " $= \frac{5 \times 1}{5 \times 100}$ টাকা

$\therefore$ 1000 " $\frac{1}{5}$ " " $= \frac{5 \times 1000}{5 \times 100}$ টাকা

$= 10$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় সবৃদ্ধিমূল = 1000 টাকা + 10 টাকা = 1010 টাকা।

[বার্ষিক কথাটার উল্লেখ না থাকিলেও 5% হার সুদ বলায় সুদের হার বার্ষিক 5 টাকা ধরা হইয়াছে।]

দ্রষ্টব্য। সময়ের পরিমাণ মাস ও দিনে দেওয়া থাকিলে 30 দিনে 1 মাস ও 12 মাসে 1 বৎসর ধরিয়া প্রদত্ত সময়কে বৎসরে পরিণত করাই প্রচলিত রীতি। আর যদি বৎসর ও দিনে কিংবা শুধু দিনে দেওয়া থাকে তবে 365 দিনে বৎসর ধরিয়া দিনসংখ্যাকে 365-এর দ্বারা ভাগ করিয়া বৎসরে পরিণত করিতে হয়।

365 সংখ্যাটির দুইটি গুণনীয়ক একটি 5 অপরটি 73 এই কথা মনে রাখিলে দিন-সংখ্যাকে বৎসরের ভগ্নাংশে পরিণত করিতে সুবিধা হয়।

22. সুদ কষায় দিন গণনা—

ঋণ গ্রহণ ও ঋণ পরিশোধের তারিখ দুইটির সুস্পষ্ট উল্লেখ থাকিলে সুদ কষিবার সময় এই দুই দিনের একটিকে ছাড়িয়া দিয়া হিসাব করিতে হয়। দুইটি তারিখের মধ্যবর্তী দিনের সংখ্যা গণনা করিবার সময় ইংরাজী কোন্ মাস কত দিনে হয় সেদিকে লক্ষ্য রাখিতে হয়। সালটি লিপ্ ইয়ার হইলে ফেব্রুয়ারি মাস 29 দিনে ধরিতে হয়। দিনগুলির সমষ্টিকে বৎসরে পরিণত করিবার সময় 365 দিনে বৎসর ধরিতে হয়।*

উদাহরণ 1. বার্ষিক 5% হার সুদে 1964 খ্রীষ্টাব্দের 28শে জানুয়ারি হইতে 22শে জুন পর্যন্ত 15000 টাকার সুদ কত হইবে?

জা. ফে. মা. এ. মে. জু.

মোট দিন-সংখ্যা $= 3 + 29 + 31 + 30 + 31 + 22$

$= 146$

$\therefore$ প্রদত্ত সময় $= \frac{146}{365}$ বৎসর $= \frac{2}{5}$ বৎসর

এখন, 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 5 টাকা

$\therefore$ 1 ,, 1 ,, ,, $= \frac{5}{100}$ টাকা

$\therefore$ 15000 ,, 1 ,, ,, $= \frac{5 \times 15000}{100}$ টাকা

$\therefore$ 15000 ,, $\frac{2}{5}$,, ,, $= \frac{5 \times 15000 \times 2}{100 \times 5}$ টাকা

$= 300$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় সুদ $= 300$ টাকা।

* যদি কোন মাসের প্রথম দিনে ধার লইয়া অপর কোনও মাসের শেষ তারিখে ধার পরিশোধ করা হয়, তবে দিন গণনা না করিয়া অন্তর্বর্তী কালে কয়টি মাস আছে তাহাই গণনা করিতে হয় এবং প্রয়োজন হইলে 12 মাসে বৎসর ধরিয়া ঐ মাস-সংখ্যা হইতে বৎসরের সংখ্যা নির্ণয় করিতে হয়।

এখানে দিনসংখ্যা হিসাব করিবার সময় জানুয়ারি মাসের 28 দিন ছাড়িয়া দিয়া (31 − 28) দিন বা 3 দিন ধরা হইয়াছে। 1964 খ্রীষ্টাব্দ লিপ্ইয়ার বলিয়া ফেব্রুয়ারি মাসে 29 দিন ধরা হইয়াছে। দুইটি তারিখের প্রথমটি ছাড়িয়া দেওয়া হইয়াছে বলিয়া জুন মাসের শেষ তারিখটি ছাড়া হয় নাই—22শে জুন পর্যন্ত 22 দিন ধরা হইয়াছে।

উদাহরণ 2. 1961 খ্রীষ্টাব্দের 17-ই ফেব্রুয়ারি হইতে 24-শে সেপ্টেম্বর পর্যন্ত $7\frac{1}{2}\%$ হারে 2500 টাকার সবৃদ্ধিমূল কত হইবে?

ফে. মা. এ. মে. জু. জুলাই. আ. সে.

এখানে প্রদত্ত সময় $= (11 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 24)$ দিন

$= 219$ দিন

$= \frac{3}{5}$ বৎসর

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ $= \frac{15}{2}$ টাকা

$\therefore$ 1 ,, 1 ,, ,, $= \dfrac{15}{2 \times 100}$ টাকা

$\therefore$ 2500 ,, 1 ,, ,, $= \dfrac{15 \times 2500}{2 \times 100}$ টাকা

$\therefore$ 2500 ,, $\frac{3}{5}$,, ,, $= \dfrac{15 \times 2500 \times 3}{2 \times 100 \times 5}$ টাকা

$= \dfrac{225}{2}$ টাকা

$= 112$ টাকা 50 পয়সা

$\therefore$ নির্ণেয় সবৃদ্ধিমূল $= 2500$ টাকা $+ 112$ টা 50 পয়সা

$= 2612$ টাকা 50 পয়সা।

প্রশ্নমালা 7

[ক]

টাকা প্রতি মাসিক সুদ—

1. 3 পয়সা হইলে 625 টাকার 4 মাসের সুদ কত হইবে ?

2. 5 পয়সা হইলে 1250 টাকার 1 বৎসরের সুদ কত হইবে ?

3. 4 পয়সা হইলে 350 টা. 50 পয়সার 6 মাসের সুদ কত হইবে ?

4. 6 পয়সা হইলে 425 টা. 75 পয়সার 1 বৎসর 4 মাসের সুদ কত হইবে ?

5. 8 পয়সা হইলে 500 টাকার 2 বৎসর 3 মাসের সুদ কত হইবে ?

শতকরা মাসিক সুদ—

6. $3\frac{1}{2}$ টাকা হইলে 50 টাকার 4 মাসের সুদ কত হইবে ?

7. $2\frac{1}{2}$ টাকা হইলে 350 টাকার 6 মাসের সুদ কত হইবে ?

8. $3\frac{1}{4}$ টাকা হইলে 432 টাকার 9 মাসের সুদ কত হইবে ?

9. $3\frac{1}{3}$ টাকা হইলে 515 টাকার 1 বৎসর 3 মাসের সুদ কত হইবে ?

10. $4\frac{1}{2}$ টাকা হইলে 624 টাকার 2 বৎসর 1 মাসের সুদ কত হইবে ?

সুদ নির্ণয় কর—

11. বার্ষিক টাকা প্রতি 12 পয়সা হারে 750 টাকার 2 বৎসর 9 মাসের।

12. বার্ষিক টাকা প্রতি 16 পয়সা হারে 1240 টাকার 3 মাসের।

13. বার্ষিক টাকা প্রতি 18 পয়সা হারে 680 টা. 50 প.-এর $1\frac{1}{3}$ বৎসরের।

14. বার্ষিক টাকা প্রতি 24 পয়সা হারে $315\frac{3}{4}$ টাকার 3 বৎসর 6 মাসের।

15. বার্ষিক টাকা প্রতি 30 পয়সা হারে 2150 টা. 70 প.-এর 1 বৎসর 8 মাসের।

16. বার্ষিক 6% হারে 300 টাকার $3\frac{1}{3}$ বৎসরের।

17. বার্ষিক 3% হারে 1020 টাকার 10 বৎসরের।

18. বার্ষিক 7% হারে 770 টাকার $2\frac{1}{2}$ বৎসরের।

19. বার্ষিক $4\frac{1}{2}$% হারে 660 টাকা 60 পয়সার 3 বৎসর 4 মাসের।

20. বার্ষিক $3\frac{3}{4}$% হারে 2241 টাকা 60 পয়সার $4\frac{1}{6}$ বৎসরের।

সবৃদ্ধিমূল নির্ণয় কর—

21. মাসিক টাকা প্রতি 4 পয়সা হার সুদে 760 টাকা 30 পয়সার 1 বৎসর 3 মাসের।

22. মাসিক শতকরা $1\frac{1}{2}$ টাকা হার সুদে 370 টাকার 25 পয়সার 2 বৎসর 8 মাসের।

23. বার্ষিক $2\frac{1}{2}$% হার সুদে 380 টাকার $4\frac{1}{2}$ বৎসরের।

24. বার্ষিক $6\frac{2}{3}$% হার সুদে 666 টাকার $3\frac{1}{2}$ বৎসরের।

25. বার্ষিক 3% হার সুদে 1010 টা. 50 পয়সার 2 বৎসর 8 মাসের।

[খ]

1. বার্ষিক 5% হার সুদে 500 টাকার 146 দিনের সুদ কত ?

2. বার্ষিক 3% হার সুদে 300 টাকার 1 বৎসর 73 দিনের সুদ কত ?

3. বার্ষিক 7% হার সুদে 1500 টাকার 219 দিনের সুদ কত ?

4. বার্ষিক 6% হার সুদে 600 টাকার 3 ব. 6 মা. 20 দিনের সুদ কত ?

5. বার্ষিক $2\frac{1}{3}$% হার সুদে 1664 টাকার 1 বৎসর 13 সপ্তাহের সুদ কত ? (52 সপ্তাহে বৎসর ধরিয়া অঙ্কটি কষিতে হইবে।)

6. 6% হারে 1923 খ্রীষ্টাব্দের 22-শে জানুয়ারি হইতে 5-ই এপ্রিল পর্যন্ত 425 টাকার সুদ কত হইবে ?

7. $4\frac{1}{2}$% হারে 1960 খ্রীষ্টাব্দের 17-ই ফেব্রুয়ারি হইতে 5-ই ডিসেম্বর পর্যন্ত 750 টাকার সুদ কত ?

8. $5\frac{1}{2}$% হারে 1963 খ্রীষ্টাব্দের 23-শে অক্টোবর 850 টাকা ঋণ করিয়া 1964 খ্রীষ্টাব্দের 29-শে মে ঐ ঋণ পরিশোধ করিলে কত সুদ দিতে হইবে ?

9. $4\frac{1}{4}$% হারে 1960 খ্রীষ্টাব্দের 2-রা জানুয়ারি 1095 টাকা ঋণ লইয়া 1-লা আগস্ট ঐ ঋণ পরিশোধ করিলে কত সুদ দিতে হইবে ?

10. বার্ষিক 5% হার সুদে 200 টাকার 2 বৎসর 146 দিনের সবৃদ্ধিমূল কত ?

11. বার্ষিক $3\frac{3}{4}$% হার সুদে 243 টাকা 20 পয়সার $4\frac{1}{8}$ বৎসরের সবৃদ্ধিমূল কত ?

12. বার্ষিক 6% হার সুদে 1200 টাকা, 1 বৎসর 3 মাস 20 দিনে সুদেমূলে কত হইবে ?

13. 1963 খ্রীষ্টাব্দের 1-লা জানুয়ারি হইতে 31-শে জুলাই পর্যন্ত 560 টাকা, 3% হার সুদে খাটাইলে সুদ-আসলে কত হইবে ?

14. একব্যক্তি 1952 খ্রীষ্টাব্দের 13-ই ফেব্রুয়ারি $6\frac{1}{4}$% হারে 480 টাকা ঋণ করিয়া 19-শে সেপ্টেম্বর তারিখে উহা পরিশোধ করিলেন। সুদ-আসলে তাঁহাকে মোট কত টাকা দিতে হইল ?

15. $3\frac{1}{2}\%$ হারে 1450 টাকার সবৃদ্ধিমূল 1935 খ্রীষ্টাব্দের 4-ঠা এপ্রিল হইতে 28-শে আগস্ট পর্যন্ত কত? (Pat. U. 1945)

23. মূলধন নির্ণয়—

(ক) প্রদত্ত সুদ হইতে মূলধন নির্ণয়—

উদাহরণ 1. শতকরা $3\frac{1}{2}$ টাকা হার সুদে কত টাকার 10 বৎসরের সুদ 49 টাকা হইবে?

$3\frac{1}{2}\%$ হার সুদে 100 টাকার 10 বৎসরের সুদ $= 3\frac{1}{2} \times 10$ টাকা

$= 35$ টাকা

$\therefore$ সুদ 35 টাকা হইলে মূলধন $= 100$ টাকা

$\therefore$ সুদ 1 টাকা হইলে মূলধন $= \frac{100}{35}$ টাকা

$\therefore$ সুদ 49 টাকা হইলে মূলধন $= \frac{100 \times 49}{35}$ টাকা

$= 140$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় মূলধন $= 140$ টাকা।

উদাহরণ 2. $6\frac{1}{4}\%$ হারে কত টাকা ধার দিলে দৈনিক 1 টাকা সুদ পাওয়া যাইবে? (C. U. 1942)

দৈনিক 1 টাকা সুদ পাওয়া গেলে 1 বৎসরে পাওয়া যায় 365 টাকা

এখন, 1 বৎসরে $6\frac{1}{4}$ টাকা সুদ পাওয়া গেলে মূলধন $= 100$ টাকা

$\therefore$ 1 „ 1 „ „ „ „ „ $= \frac{100}{6\frac{1}{4}}$ টাকা

$\therefore$ 1 „ 365 „ „ „ „ „ $= \frac{100}{1} \times \frac{4}{25} \times \frac{365}{1}$

$= 5840$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় মূলধন $= 5840$ টাকা।

(খ) প্রদত্ত সবৃদ্ধিমূল হইতে মূলধন নির্ণয়—

উদাহরণ 1. শতকরা $7\frac{1}{2}$ টাকা হার সুদে কত টাকার 6 বৎসরের সবৃদ্ধিমূল 87 টাকা হইবে?

$7\frac{1}{2}\%$ হার সুদে 100 টাকার 6 বৎসরের সুদ $= 7\frac{1}{2} \times 6$ টাকা
$= 45$ টাকা

$\therefore$ 100 টাকার সবৃদ্ধিমূল $= (100 + 45)$ টাকা $= 145$ টাকা

সবৃদ্ধিমূল 145 টাকা হইলে মূলধন $= 100$ টাকা

$\therefore$ „ 1 টাকা „ „ $= \frac{100}{145}$ টাকা

$\therefore$ „ 87 টাকা „ „ $= \frac{100 \times 87}{145}$ টাকা
$= 60$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় মূলধন $= 60$ টাকা।

উদাহরণ 2. নির্দিষ্ট হার সুদে কোনও মূলধন তিন বৎসরে সুদেমূলে 354 টাকা এবং পাঁচ বৎসরে সুদেমূলে 390 টাকা হইলে, মূলধন কত নির্ণয় কর।

সবৃদ্ধিমূল $=$ আসল $+$ সুদ

অতএব, এক্ষেত্রে আসল $+ 5$ বৎসরের সুদ $= 390$ টাকা....(1)

আবার, আসল $+ 3$ বৎসরের সুদ $= 354$ টাকা....(2)

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাওয়া যায়,

2 বৎসরের সুদ $= 36$ টাকা

$\therefore$ 1 বৎসরের সুদ $= \frac{36}{2}$ টাকা $= 18$ টাকা

$\therefore$ 3 বৎসরের সুদ $= 18 \times 3$ টাকা $= 54$ টাকা

∴ নির্ণেয় আসল = 3 বৎসরের সবৃদ্ধিমূল − 3 বৎসরের সুদ

= 354 টাকা − 54 টাকা

= 300 টাকা।

উদাহরণ 4. 4% হারে 15-ই এপ্রিল হইতে 27-শে জুন পর্যন্ত কত টাকা সুদে খাটাইলে সুদেমূলে 1008 টাকা হইবে ?

15-ই এপ্রিল হইতে 27-শে জুন পর্যন্ত (একদিন ছাড়িয়া দিয়া)

এ. মে. জু.

মোট দিন-সংখ্যা $= 15 + 31 + 27 = 73$

এখন, 73 দিন $= \frac{73}{365}$ বৎসর $= \frac{1}{5}$ বৎসর

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 4 টাকা

∴ 100 টাকার $\frac{1}{5}$ বৎসরের সুদ $= (4 \times \frac{1}{5})$ টাকা $= \frac{4}{5}$ টাকা

$(100 + \frac{4}{5})$ টাকা বা $\frac{504}{5}$ টাকা সবৃদ্ধিমূল হইলে আসল = 100 টাকা

∴ 1 টাকা " " " $= \frac{100 \times 5}{504}$ টা.

∴ 1008 " " " $= \frac{100 \times 5 \times 1008}{504}$ টা.

= 1000 টাকা

∴ নির্ণেয় মূলধন = 1000 টাকা।

প্রশ্নমালা 8

1. বার্ষিক $6\frac{1}{4}\%$ হার সুদে কত টাকার 4 বৎসরের সুদ 25 টাকা হইবে ?

2. বার্ষিক $4\frac{1}{2}\%$ হারে কত মূলধনের $3\frac{1}{4}$ বৎসরের সুদ 91 টা. 26 প. হইবে ?

3. এক ব্যক্তি $3\frac{1}{4}\%$ হারে টাকা ধার নিয়া 5 বৎসরে 130 টাকা সুদ দিলেন। তিনি কত টাকা ধার নিয়াছিলেন?

4. 1956 খ্রীষ্টাব্দের 21-শে ফেব্রুয়ারি হইতে 26-শে সেপ্টেম্বর পর্যন্ত $7\frac{1}{2}\%$ হারে কত টাকা সুদে খাটাইলে সুদের পরিমাণ 54 টাকা হইবে?

5. 5% হার সুদে কত টাকা ধার দিলে দৈনিক এক টাকা সুদ হয়? (C. U. 1925)

6. কত মূলধন $4\frac{1}{18}\%$ হার সুদে খাটাইলে প্রতিদিন এক টাকা সুদ পাওয়া যাইবে? (C. U. 1935, '37)

7. বার্ষিক সুদের হার 4% হইতে কমিয়া $3\frac{3}{4}\%$ হওয়ায় এক ব্যক্তির বার্ষিক আয় 60 টাকা কমিয়া গেল। ঐ ব্যক্তির মূলধন কত? (C. U. 1933)

8. বার্ষিক $6\frac{2}{3}\%$ হারে কত টাকা 5 বৎসরে সুদেমূলে 100 টাকা হইবে?

9. বার্ষিক 5% হারে কত টাকা $2\frac{2}{3}$ বৎসরে 85 টা. হইবে? (C. U. 1932)

10. শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হার সুদে কত মূলধন 5 বৎসরে সুদেমূলে 500 টাকা হইবে? (C. U. 1943)

11. শতকরা বার্ষিক $6\frac{1}{4}$ টাকা হার সুদে কত মূলধন 4 বৎসরে সুদেমূলে 18000 টাকা হইবে? (C. U. 1939)

12. $3\frac{3}{4}\%$ হার সুদে কত টাকা ধার দিলে $2\frac{1}{2}$ বৎসরে সুদেমূলে 367 টাকা 50 পয়সা হইবে? (ক. প্র. 1911)

13. 5% হারে 11-ই জুন হইতে ঐ বৎসরেরই 4-ঠা নভেম্বর পর্যন্ত কত টাকা খাটাইলে সুদেমূলে 5151 টাকা হয়? (P. U. 1930)

14. কোন মূলধন হইতে 4 বৎসরে 812 টাকা এবং 7 বৎসরে 896 টাকা সবৃদ্ধিমূল হইলে, মূলধন কত ?

15. কোনও টাকার বার্ষিক সুদ, আসলের $\frac{1}{10}$ অংশ এবং 8 বৎসরে ঐ টাকা সুদেমূলে 801 টাকা হয়। আসল কত নির্ণয় কর।

24. **সুদের হার নির্ণয়—**

(ক) আসল, সুদ ও সময় দেওয়া থাকিলে সুদের শতকরা হার নির্ণয় :—

উদাহরণ 1. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে 400 টাকার $2\frac{1}{2}$ বৎসরের সুদ 62 টাকা 50 পয়সা হইবে ?

সুদ $= 62$ টা. 50 প. $= 62\frac{1}{2}$ টাকা $= \frac{125}{2}$ টাকা

সময় $= 2\frac{1}{2}$ বৎসর $= \frac{5}{2}$ বৎসর।

এক্ষেত্রে, 400 টাকার $\frac{5}{2}$ বৎসরের সুদ $= \frac{125}{2}$ টাকা

$\therefore$ 400 " 1 " " $= \frac{125 \times 2}{2 \times 5}$ টাকা

$\therefore$ 1 " 1 " " $= \frac{125 \times 2}{2 \times 5 \times 400}$ টাকা

$\therefore$ 100 " 1 " " $= \frac{125 \times 2 \times 100}{2 \times 5 \times 400}$ টাকা

$= \frac{25}{4}$ টাকা $= 6\frac{1}{4}$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় সুদের হার $= 6\frac{1}{4}\%$ ।

উদাহরণ 2. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে কোন মূলধনের সুদ $7\frac{1}{2}$ বৎসরে মূলধনের $\frac{3}{16}$ অংশ হইবে ?

$$7\frac{1}{2} \text{ বৎসর} = \frac{15}{2} \text{বৎসর}$$

মনে কর, আসল 100 টাকা ; সুদ = 100 টাকার $\frac{3}{16} = \frac{75}{4}$ টাকা
অতএব 100 টাকার $\frac{15}{2}$ বৎসরের সুদ = $\frac{75}{4}$ টাকা

$$\therefore 100 \;\;,,\;\; 1 \;\;,,\;\;\;\; ,, \;\; = \frac{75 \times 2}{4 \times 15} \text{ টাকা}$$

$$= \frac{5}{2} \text{ টাকা} = 2\frac{1}{2} \text{ টাকা}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সুদের হার = $2\frac{1}{2}\%$

(খ) আসল, সবৃদ্ধিমূল ও সময় দেওয়া থাকিলে সুদের হার নির্ণয়—

উদাহরণ 1. বার্ষিক শতকরা কতহার সুদে 480 টাকা 2 বৎসর 3 মাসে সুদেমূলে 531 টাকা 30 পয়সা হইবে ?

এক্ষেত্রে, সবৃদ্ধিমূল = 531 টাকা 30 পয়সা = $531\frac{3}{10}$ টাকা

$$= \frac{5313}{10} \text{ টাকা}$$

আসল = 480 টাকা

সময় = 2 বৎসর 3 মাস = $2\frac{1}{4}$ বৎসর = $\frac{9}{4}$ বৎসর

সবৃদ্ধিমূল − মূলধন = মূলধনের সুদ

$$\therefore 480 \text{ টাকার সুদ} = \left(\frac{5313}{10} - 480 \right) \text{ টাকা}$$

$$= \frac{513}{10} \text{ টাকা}$$

∴ 480 টাকার $\frac{9}{4}$ বৎসরের সুদ $= \frac{513}{10}$ টাকা

∴ 480 „ 1 „ „ $= \frac{513 \times 4}{10 \times 9}$ টাকা

∴ 1 „ 1 „ „ $= \frac{513 \times 4}{10 \times 9 \times 480}$ টাকা

∴ 100 „ 1 „ „ $= \frac{513 \times 4 \times 100}{10 \times 9 \times 480}$ টাকা

$= \frac{19}{4}$ টাকা $= 4\frac{3}{4}$ টাকা

∴ নির্ণেয় সুদের হার $= 4\frac{3}{4}\%$

উদাহরণ 2. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে যে কোনও মূলধনের 15 বৎসরের সুদ সবৃদ্ধিমূলের $\frac{4}{9}$ অংশ হইবে ?

সবৃদ্ধিমূল 9 টাকা ধরিলে সুদ হইবে 9 টাকার $\frac{4}{9}$ অংশ $= 4$ টাকা

অতএব মূলধন হইবে 9 টাকা $-$ 4 টাকা $= 5$ টাকা

প্রশ্নানুসারে, 5 টাকার 15 বৎসরের সুদ $= 4$ টাকা

∴ 5 „ 1 „ „ $= \frac{4}{15}$ টাকা

∴ 1 „ 1 „ „ $= \frac{4}{15 \times 5}$ টাকা

∴ 100 „ 1 „ „ $= \frac{4 \times 100}{15 \times 5}$ টাকা

$= \frac{16}{3}$ টাকা $= 5\frac{1}{3}$ টাকা

∴ নির্ণেয় সুদের হার $= 5\frac{1}{3}\%$

উদাহরণ 3. সুদের হার কত হইলে যে-কোন মূলধন 25 বৎসরে সুদেমূলে তিন গুণ হইবে ?

মনে কর, আসল $= 100$ টাকা

প্রশ্নানুসারে, 100 টাকা 25 বৎসরে সুদেমূলে তিন গুণ অর্থাৎ 300 টাকা হইবে। অতএব সুদ হইবে (300—100) টাকা বা 200 টাকা

100 টাকার 25 বৎসরের সুদ = 200 টাকা

$\therefore$ 100 „ 1 „ „ $= \frac{200}{25}$ টাকা = 8 টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় সুদের হার = 8%

প্রশ্নমালা 9

শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে

1. 500 টাকার 5 বৎসরের সুদ 25 টাকা হইবে ?

2. 325 টাকার $2\frac{1}{2}$ বৎসরের সুদ 32 টাকা 50 পয়সা হইবে ?

3. 7300 টাকায় দৈনিক 1 টাকা সুদ পাওয়া যাইবে ?

4. 3520 টাকা ধার দিলে 2 বৎসর 6 মাসে 275 টাকা সুদ পাওয়া যাইবে ?

5. 4250 টাকা 3 বৎসরে সুদেমূলে 4760 টাকা হইবে। (C. U. 1948)

6. 6000 টাকা 5 বৎসরে সুদেমূলে 7650 টাকা হইবে ? (C. U. 1921)

7. 800 টাকার 4 বৎসরের সুদ, 4% হারে 625 টাকার 8 বৎসরের সুদের সমান হইবে ? (C. U. 1927)

8. কোন্ মূলধন 10 বৎসরে সুদেমূলে দ্বিগুণ হইবে ? (C. U. 1915)

9. কোন্ মূলধন 20 বৎসরে সুদেমূলে দেড়গুণ হইবে ?

10. কোন্ মূলধনের 5 বৎসরের সুদ সবৃদ্ধিমূলের $\frac{1}{6}$ অংশ হইবে ?

11. কোন্ মূলধনের সুদ $6\frac{1}{4}$ বৎসরে মূলধনের $\frac{3}{8}$ অংশ হইবে ?

(C. U. 1949)

12. কোন্ মূলধনের সুদ $6\frac{1}{4}$ বৎসরে মূলধনের $\frac{5}{16}$ অংশ হইবে ?

(C. U. 1946)

13. এক ব্যক্তি 1961 খ্রীষ্টাব্দের 1-লা জুন 1576 টাকা ঋণ করিয়া 30-শে নভেম্বর 1635 টাকা 10 পয়সা দিয়া ঐ ঋণ পরিশোধ করিলেন। তাঁহাকে শতকরা বার্ষিক কত হারে সুদ দিতে হইয়াছিল ?

14. এক ব্যক্তি তিন সপ্তাহের জন্য 130 টাকা ঋণ করিয়াছিলেন। ঋণ পরিশোধ করিবার সময় সুদেমূলে তাঁহাকে 130 টাকা 60 পয়সা দিতে হইল। বার্ষিক শতকরা কত হারে তিনি ঋণ গ্রহণ করিয়াছিলেন ?

15. কোনও মূলধন 5 বৎসরে সুদেমূলে 559 টাকা এবং $7\frac{1}{2}$ বৎসরে 623 টাকা 50 পয়সা হইল। মূলধন ও সুদের হার নির্ণয় কর।

25. সময় নির্ণয়—

(ক) আসল, সুদ ও সুদের হার দেওয়া থাকিলে সময় নির্ণয়—

উদাহরণ 1. $6\frac{1}{4}\%$ হার সুদে কত বৎসরে 480 টাকার সুদ 75 টাকা হইবে ?

এখানে মোট সুদের পরিমাণ 75 টাকা

আবার, 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ $= 6\frac{1}{4}$ টাকা

$\therefore$ 1 „ 1 „ „ $= \dfrac{25}{4 \times 100}$ টাকা

$\therefore$ 480 „ 1 „ „ $= \dfrac{25 \times 480}{4 \times 100}$ টাকা

$= 30$ টাকা

প্রদত্ত শতকরা হারে প্রদত্ত মূলধনের 1 বৎসরের সুদ বাহির করা

হইল। এখন এই এক বৎসরের সুদের দ্বারা মোট সুদকে ভাগ করিলে নির্ণেয় সময় পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $=\frac{75}{30}$ বৎসর $=2\frac{1}{2}$ বৎসর।

(খ) আসল, সবৃদ্ধিমূল ও সুদের হার হইতে সময় নির্ণয়—

উদাহরণ 1. বার্ষিক $7\frac{1}{2}$% হার সুদে কত বৎসরে 640 টাকার সবৃদ্ধিমূল 784 টাকা হইবে ?

এখানে মূলধনের মোট সুদ = 784 টাকা − 640 টাকা

= 144 টাকা

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ $=7\frac{1}{2}$ টাকা

$\therefore$ 1 „ 1 „ „ $=\frac{15}{2\times100}$ টাকা

$\therefore$ 640 „ 1 „ „ $=\frac{15\times640}{2\times100}$ টাকা

= 48 টাকা।

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $=\frac{144}{48}$ বৎসর।

= 3 বৎসর।

প্রশ্নমালা 10

1. বার্ষিক 5% হার সুদে কত বৎসরে 1520 টাকার সুদ 342 টাকা হইবে ?

2. বার্ষিক $3\frac{1}{8}$% হার সুদে কত বৎসরে 5856 টাকার সুদ 274 টাকা 50 পয়সা হইবে ?

3. বার্ষিক $7\frac{1}{2}\%$ হার সুদে কত বৎসরে 3520 টাকার সুদ 594 টাকা হইবে ?

4. বার্ষিক 5% হার সুদে 3650 টাকার কত সময়ের সুদ 50 পয়সা হইবে ?

5. বার্ষিক $2\frac{1}{2}\%$ হার সুদে কত বৎসরে 1960 টাকা সুদেমূলে 2205 টাকা হইবে ?

6. বার্ষিক $3\frac{1}{3}\%$ হার সুদে কত বৎসরে 1350 টাকা সুদেমূলে 1620 টাকা হইবে ? (C. U. 1947)

7. বার্ষিক $12\frac{1}{2}\%$ হার সুদে 213 টাকা কত বৎসরে সুদেমূলে 426 টাকা হইবে ? (D. B. 1948)

8. বার্ষিক $5\frac{1}{2}\%$ হার সুদে কত বৎসরে 2125 টাকার সমৃদ্ধিমূল $2943\frac{1}{8}$ টাকা হইবে ? (C. U. 1944)

9. বার্ষিক $5\frac{1}{2}\%$ হার সুদে কত বৎসরে 5000 টাকা 6100 টাকায় পরিণত হইবে ? (C. U. 1919)

10. এক ব্যক্তি বার্ষিক $3\frac{1}{2}\%$ হার সুদে 1560 টাকা ঋণ করিয়া 1833 টাকা দিয়া সুদ সহ তাঁহার সম্পূর্ণ ঋণ পরিশোধ করিলেন। তিনি ঋণ করিবার কতকাল পরে উহা পরিশোধ করিয়াছিলেন ?

11. বার্ষিক 5% হার সুদে কোনও মূলধন কত বৎসরে সুদেমূলে দ্বিগুণ হইবে ? (C. U. 1923)

12. টাকা প্রতি মাসিক 2 পয়সা হার সুদে টাকা ধার দিলে কত বৎসরে উহা সুদেমূলে চতুর্গুণ হইবে ?

13. বার্ষিক 6% হারে কত বৎসরে, সুদ সবৃদ্ধিমূলের $\frac{3}{4}$ অংশ হইবে ?

14. 3% হারে 4000 টাকার কত সময়ের সুদ, 4% হারে 5000 টাকার 5 বৎসরের সুদের সমান হইবে? (C. U. 1940)

15. 5% হার সুদে খাটাইয়া কোন আসল 6 বৎসরে সুদেমূলে 1326 টাকা হইল। কত বৎসরে উহা সুদেমূলে 1530 টাকা হইবে? (P. U. 1891)

প্রশ্নমালা 11

(সরল কুসীদ সম্বন্ধীয় জটিল প্রশ্ন)

1. যদি 1000 টাকার 5 বৎসরের সুদ 250 টাকা হয়, তবে ঐ একই হার সুদে 3500 টাকার 1 বৎসর 6 মাসের সুদ কত হইবে? (C. U. 1872)

2. 450 টাকা 4 বৎসরে সুদেমূলে 540 টাকা হয়। কত টাকা 5 বৎসরে সুদেমূলে 637 টাকা 50 পয়সা হইবে? (C. U. 1887)

3. বার্ষিক 6% হারে $2\frac{1}{2}$ বৎসর পূর্বে আমি যে টাকা ধার করিয়াছিলাম তাহা এখন সুদে-আসলে 638 টাকা 25 পয়সা হইয়াছে। আমি কত টাকা ধার করিয়াছিলাম? (A. U. 1894)

4. কোনও মূলধনের 8% হারে 5 বৎসরে যত সুদ হয়, 8 বৎসরে তাহা অপেক্ষা 96 টাকা অধিক হয়; মূলধন কত?

5. 3% হারে 250 টাকা 6 বৎসরের জন্য ধার দিলে যত সুদ পাওয়া যায় 5% হারে কত টাকা 4 বৎসরের জন্য ধার দিলে তত সুদ পাওয়া যাইবে? (C. U. 1930)

6. বার্ষিক 5% হারে কোন আসল টাকার 9 মাসের সুদ যত হয় তাহা 4% হারে ঐ টাকার 15 মাসের সুদ অপেক্ষা 125 টাকা কম। আসল কত? (P. U. 1320)

7. A 8% হার সুদে B-কে 500 টাকা এবং C-কে কিছু টাকা ধার দিল এবং 4 বৎসর পরে সে উভয়ের নিকট হইতে মোট 210 টাকা সুদ পাইল। A, C-কে কত টাকা ধার দিয়াছিল ? (D. B. 1937)

8. কোনও মূলধন ও উহার 4 বৎসরের সুদের সমষ্টি 240 টাকা ; যদি সুদের পরিমাণ মূলধনের $\frac{1}{5}$ অংশ হয়, তবে মূলধন ও সুদের হার নির্ণয় কর।

9. কোন আসল টাকার সবৃদ্ধিমূল 3 বৎসরে 632 টাকা 50 পয়সা এবং 4 বৎসর 6 মাসে 673 টাকা 75 পয়সা হইলে আসল ও সুদের হার নির্ণয় কর। (P. U. 1925)

10. 5 বৎসরে কোন মূলধন সুদেমূলে 1100 টাকা হইল। সুদ যদি মূলধনের $\frac{3}{8}$ অংশ হয়, তবে মূলধন ও সুদের হার কত ?

(C. U. 1934)

11. একব্যক্তি 6% হারে 375 টাকা এবং 4% হারে 625 টাকা সুদে খাটাইলেন। মোট মূলধনের উপর তিনি গড়ে শতকরা কত হারে সুদ পাইলেন ?

12. 5% হারে 540 টাকার 8 বৎসরের সুদ যত হইবে, 6% হারে 900 টাকার কত সময়ে তত সুদ হইবে ? (C. U. 1928)

13. কোনও মূলধন 5% হারে 7 বৎসরে সুদে আসলে 756 টাকা হয়। কত বৎসরে উহা সুদে আসলে 840 টাকা হইবে ?

14. কোন মূলধন 20 বৎসরে সুদেমূলে দ্বিগুণ হয়। কত বৎসরে উহা তিনগুণ হইবে ?

15. কোন মূলধন $6\frac{1}{4}$% হারে 5 বৎসরে সুদেমূলে 1050 টাকা হইলে ঐ হারে কত বৎসরে সুদেমূলে উহা দ্বিগুণ হইবে ?

প্রশ্নমালা 12

(বিবিধ প্রশ্ন)

ভগ্নাংশযুক্ত রাশিমালার সরলীকরণ

সরল কর :—

1. $$\frac{4\frac{2}{3}+3\frac{2}{5}\div 1\frac{2}{15}-\frac{5}{6}}{(4\frac{2}{3}+3\frac{2}{5})\div(1\frac{2}{15}-\frac{5}{6})}\div\frac{8\frac{1}{5}}{5\frac{1}{2}}\times 8\frac{4}{5}$$

2. $$\frac{\cdot 0585}{\cdot 045}\text{ এর }\frac{\cdot 67}{8{\cdot}71}\div\frac{12{\cdot}6}{14}\text{ এর }\frac{\cdot 13}{1{\cdot}17}$$

3. $$\frac{5{\cdot}25\div 3{\cdot}5\times\cdot 6}{5{\cdot}25\div 3{\cdot}5\text{ এর }\cdot 6}-\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}+\left(2{\cdot}75-\frac{\cdot 76}{3{\cdot}8}+1{\cdot}25\right)$$

4. $$(4\frac{3}{5}-2\frac{3}{10})\text{ এর }\frac{\frac{13}{15}}{8\frac{2}{3}}\div(10\frac{1}{5}\text{ এর }\frac{9}{170})\div 1\frac{1}{6}\text{ এর }\frac{3\text{ টা. }14\text{ প.}}{9\text{ টা. }42\text{ প.}}$$

5. $$6-6\times\frac{1}{2+\dfrac{1}{3+\frac{1}{4}}}+\frac{5}{12}\times\frac{3\text{ঘ. }24\text{ মি.}}{17\text{ ঘ.}}-\frac{2\frac{3}{7}}{\frac{5}{7}}$$

ভগ্নাংশের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.

1. কোন্ বৃহত্তম ভগ্নাংশ দ্বারা $1\frac{3}{4}$, $2\frac{4}{5}$ এবং $6\frac{5}{6}$ কে যথাক্রমে ভাগ করিলে ভাগফল প্রতিক্ষেত্রে অখণ্ড সংখ্যা হইবে ?

2. তিনটি পাত্রের প্রথমটিতে $3\frac{1}{2}$ লিটার মহিষের দুধ, দ্বিতীয়টিতে $4\frac{1}{4}$ লিটার গরুর দুধ এবং তৃতীয়টিতে $5\frac{3}{4}$ লিটার ছাগলের দুধ আছে। সর্ব্বাপেক্ষা বৃহৎ কোন্ মাপিবার পাত্র দিয়া প্রত্যেকটি পাত্রের দুধ সম্পূর্ণরূপে মাপা যাইবে ?

3. এমন একটি লঘিষ্ঠ সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাকে $1\frac{4}{7}$, $2\frac{5}{14}$, $1\frac{1}{21}$ দ্বারা ভাগ করিলে প্রত্যেক ভাগফল একটি পূর্ণসংখ্যা হইবে।

4. একটি বৃত্তাকার মাঠের চারদিক ঘুরিয়া আসিতে পরেশের $4\frac{1}{6}$ মিনিট কাজলের $6\frac{2}{3}$ মিনিট ও সমীরের $3\frac{3}{4}$ মিনিট সময় লাগে। মাঠটির চারিদিকে ঘুরিবার জন্য তাহারা একই সময়ে একই স্থান হইতে যাত্রা করিয়া একই দিকে চলিতে লাগিল। ক্লান্তি বশতঃ থামিয়া না গেলে যাত্রা করিবার কতক্ষণ পরে তাহারা একসঙ্গে যাত্রাস্থলে আসিয়া মিলিত হইবে ?

5. দুইটি ভগ্নাংশের ল. সা. গু. $1\frac{5}{27}$ এবং গ. সা. গু. $\frac{8}{81}$; একটি ভগ্নাংশ $\frac{8}{27}$ হইলে অপরটি কত ?

6. গ. সা. গু. নির্ণয় কর—

5·2, 1·04, ·572, ·0676.

7. ল. সা. গু. নির্ণয় কর—

·5, ·05, ·005, ·0005

8· বৃহত্তম কোন্ সংখ্যাদ্বারা 6·8, 13·6, 17 ও 27·2 কে ভাগ করিলে ভাগফল প্রত্যেক স্থলে অখণ্ড সংখ্যা হইবে ?

9. লঘিষ্ঠ কোন্ সংখ্যাকে ·03, ·045, 6, 7·5 দ্বারা ভাগ করিলে প্রত্যেক ভাগফল অখণ্ড সংখ্যা হইবে ?

10. দুইটি সংখ্যার যোগফল $2\frac{13}{16}$ ও বিয়োগফল $\frac{5}{8}$; সংখ্যা-দুইটির ল. সা. গু $5\frac{5}{8}$ হইলে উহাদের গ. সা. গু. কত ?

বর্গমূল

1. 15652 হইতে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বিয়োগ করিলে বিয়োগফল পূর্ণবর্গ হইবে ?

2. 1844 এর সহিত কোন্ লঘিষ্ঠ সংখ্যা যোগ করিলে যোগফল পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

3. কোনও সমিতির সভ্যসংখ্যা যত প্রত্যেকে তত আধুলী চাঁদা দেওয়ায় মোট 612 টাকা 50 পয়সা চাঁদা আদায় হইল। প্রত্যেকের চাঁদার পরিমাণ কত ?

4. 3675 কে কোন্ লঘিষ্ঠ সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে গুণফল পূর্ণবর্গ হইবে ?

5. দুইটি সংখ্যার গুণফল 10625 ; বৃহত্তর সংখ্যাটিকে ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল হয় 17 ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

6, 784224016-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

7. একদল বালক 14280 টাকা 25 পয়সা ব্যয় করিল। দলে যতজন বালক ছিল প্রত্যেকে তত সিকি ব্যয় করিয়া থাকিলে ঐ দলে মোট কতগুলি বালক ছিল নির্ণয় কর।

8. কোন্ সংখ্যাকে সেই সংখ্যাটি দ্বারা গুণ করিলে গুণফল 5499025 হয় ?

9. একজন সেনাপতি তাঁহার অধীনস্থ 140632 জন সৈন্যকে নিরেট বর্গাকারে সাজাইতে গিয়া দেখিলেন 7 জন সৈন্য বেশী হইতেছে। ঐ সৈন্যসজ্জার সম্মুখ সারিতে কতজন সৈন্য ছিল ?

10. একটি বিদ্যালয়ের ছাত্রদিগকে 18, 24 বা 32 সারিতে সাজান যায় এবং উহাদিগকে নিরেট বর্গাকারেও সাজান যায়। বিদ্যালয়ে ন্যূনপক্ষে কতজন ছাত্র আছে ?

সময় ও কার্য্য

1. প্রতিদিন 7 ঘণ্টা কাজ করিয়া ক একটি কাজ 4 দিনে ও খ 3 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। প্রতিদিন 6 ঘণ্টা হিসাবে কাজ করিলে উভয়ে একত্রে কতদিনে কাজটি করিতে পারিবে ?

2. একজন প্রাপ্তবয়স্ক লোক ও একটি বালক একত্রে একটি কাজ 20 দিনে করিতে পারে। বয়স্ক লোকটি 10 দিনে কাজটির $\frac{1}{3}$ অংশ করিতে পারিলে বালকটি একা সম্পূর্ণ কাজটি কতদিনে করিতে পারিবে ?

3. ক, খ ও গ তিনজনে একটি কাজ 6 দিনে করিতে পারে। ঐ কাজ ক একা 12 দিনে ও খ একা 18 দিনে করিতে পারে। গ একা ঐ কাজ কতদিনে করিতে পারিবে ?

4. ক একটি কাজ 12 দিনে ও খ 9 দিনে করিতে পারে। তাহারা উভয়ে একত্র কাজ আরম্ভ করিল কিন্তু কাজটি শেষ হইবার 2 দিন পূর্বে ক চলিয়া গেল। কাজটি কতদিনে শেষ হইয়াছিল ?

5. একটি কাজ ক 25 দিনে, খ 30 দিনে এবং গ 45 দিনে করিতে পারে। তাহারা তিনজনে একত্রে কাজটি আরম্ভ করিল কিন্তু 5 দিন পরে ক চলিয়া গেল এবং কাজ শেষ হইবার 3 দিন পূর্বে খ চলিয়া গেল। কাজটি মোট কতদিনে শেষ হইয়াছিল ?

6. একটি চৌবাচ্চায় তিনটি নল আছে। প্রথম ও দ্বিতীয় নল দ্বারা খালি চৌবাচ্চাটি যথাক্রমে 10 মিনিট ও 15 মিনিটে পূর্ণ হয়। তৃতীয় নলটি দ্বারা পূর্ণ চৌবাচ্চাটি খালি হয়। নল তিনটি একত্রে খুলিয়া দিলে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইতে 12 মিনিট সময় লাগে। তৃতীয় নলটি দিয়া কত সময়ে পূর্ণ চৌবাচ্চাটি খালি হইবে ?

7. একটি চৌবাচ্চায় দুইটি নল আছে। প্রথম নলটি দ্বারা 12 মিনিটে এবং দ্বিতীয় নলটি দ্বারা 15 মিনিটে খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়। দুইটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিবার কিছুক্ষণ পরে প্রথম নলটি বন্ধ করিয়া দেওয়ায় চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইতে মোট 10 মিনিট সময় লাগিল। প্রথম নলটি কখন বন্ধ করা হইয়াছিল ?

8. এক ব্যক্তি 18 দিনে একটি কাজ শেষ করিবার চুক্তি করিয়া ঐ কাজে 20 জন লোক নিযুক্ত করিলেন। 10 দিন পরে তিনি দেখিতে পাইলেন কাজটির অর্ধেক মাত্র সমাপ্ত হইয়াছে। নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে কাজ শেষ করিতে হইলে তাঁহাকে অতিরিক্ত আর কত-জন লোক নিযুক্ত করিতে হইবে ?

9. 6 জন পুরুষ অথবা 10 জন স্ত্রীলোক একটি কাজ 24 দিনে করিতে পারে। 3 জন পুরুষ ও 7 জন স্ত্রীলোক ঐ কাজ কতদিনে করিতে পারিবে ?

10. 150 জন মজুর 100 দিনে একটি পরিখা খনন করিতে পারে। 60 দিন কাজ করিয়া 50 জন মজুর চলিয়া গেলে অবশিষ্ট মজুরেরা আর কতদিনে কাজটি শেষ করিবে ?

সরল কুসীদ

1. বার্ষিক 10% হারে কত টাকার 5 বৎসরের সুদ 500 টাকা হইবে ?

2. বার্ষিক $12\frac{1}{2}$% হার সুদে কত টাকা ধার নিলে দৈনিক 1 টাকা হারে সুদ দিতে হইবে ?

3. বার্ষিক $7\frac{1}{2}$% হারে কত টাকা 5 বৎসরে সুদেমূলে 550 টাকা হইবে ?

4. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে $2\frac{1}{2}$ বৎসরে 800 টাকার সুদ, বার্ষিক 5% হার সুদে 500 টাকার 8 বৎসরের সুদের সমান হইবে ?

5. বার্ষিক 7% হার সুদে 3000 টাকা যে সময়ে সুদেমূলে 4050 টাকা হয়, বার্ষিক 5% হার সুদে কত টাকা সেই সময়ে সুদেমূলে 5000 টাকা হইবে ?

6. কোনও আসল 3 বৎসরে সুদেমূলে 1694 টাকা এবং 5 বৎসরে সুদেমূলে 1890 টাকা হইলে আসল ও শতকরা বার্ষিক সুদের হার নির্ণয় কর।

7. 2500 টাকার 4 বৎসরের সুদ ও 1600 টাকার 5 বৎসরের সুদ একত্রে 1125 টাকা। যদি বার্ষিক সুদের হার উভয় ক্ষেত্রে একই হয় তবে ঐ সুদের হার কত ?

8. দুইটি সমান মূলধন 7% ও 8% হার সুদে ধার দিয়া 5 বৎসরে মোট 1350 টাকা সুদ পাওয়া গেল। ঐ মূলধন কত নির্ণয় কর।

9. বার্ষিক $6\frac{1}{4}$% হার সুদে কোনও মূলধন কত বৎসরে সুদেমূলে দ্বিগুণ হইবে ?

10. কোনও মূলধন 10 বৎসরে সুদেমূলে দ্বিগুণ হয়, কত বৎসরে উহা তিনগুণ হইবে ?

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা—1

1. $7 \times 13 \times 19$; $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$; $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$; $3 \times 5 \times 11 \times 17$; $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$.

2. 1254 ও 73083 শুধু মাত্র 3-এর দ্বারা, 9125 শুধু মাত্র 5-এর দ্বারা এবং 94590 ও 281355, 3 ও 5 উভয়ের দ্বারাই বিভাজ্য।

3. 46000 ও 73128 শুধুমাত্র 8-এর দ্বারা, 35784 ও 41076 শুধুমাত্র 9-এর দ্বারা এবং 81072 ও 99288, 8 ও 9 উভয়ের দ্বারা বিভাজ্য।

4. 2,4 ; 5. 3,5,7 ও 11 ; 6. 17 সে. মি. ;
7. 129 টাকা 60 পয়সা ; 8. 2309 , 9. 3597 ;
10. 200 ; 11. 97650 ; 12. 315 ;
13. 187. ; 14. 20. পয়সা ; 15. 13405 টা.
16. 57. ; 17. 25 সে. লি. ; 18. 98·6 মি. ;
19. 1120 ; 20. 6 টাকা, 55 দিন ;
21. $2411\frac{1}{8}$ বৎসর
22. 2 ঘ. 37 মি. 3 সে. ; 23. 1099,1256,1413 ;
24. 70, 420 ; 140, 210 ;

25. 1892 ;	26. $\frac{3}{4}$;	27. ·06 ;
28. $\frac{3}{4}$;	29. $1\frac{12}{13}$;	30. $2\frac{2}{9}$;
31. 1 ;	32. $1\frac{1}{2}$;	33. $\frac{10}{13}$ অংশ ;
34. 72 কি. মি. ;	35. 220 ;	
36. 22500 টাকা ;		
37. 500 মিটার ;	38. 12 টাকা ;	39. 200 ;
40. $1\frac{19}{25}$, $7\frac{1}{25}$;	41. 720 লিটার ;	42. 30 জন ;
43. 105 ;	44. 2 ;	45. 5 ;
46. 21 ;	47. 45 পয়সা ;	
48. 12 টাকা 50 পয়সা ;		
49. 45 ও 20 ;	50. 25 জন ;	51. $12\frac{1}{2}$% ;
52. 504 টাকা ;	53. 96% ;	54. 72% ;
55. 3080 টাকা লাভ ;	56. 8250 টাকা ;	57. 26215 জন
58. 13 টাকা 90 পয়সা ;	59. $6\frac{1}{4}$% ;	60. $90\frac{4}{5}$% ;
61. 1 টাকা 50 পয়সা ;	62. 210 টাকা ;	63. 500 টাকা

64. 3 কি. গ্রা. সোরা, 1 কি. গ্রা. গন্ধক, 750 গ্রা. লোহাচুর 250 গ্রা. কাঠ কয়লা ;

65. 946 টাকা ;	66. $56\frac{1}{4}$%	67. $33\frac{1}{3}$% ;
68. $2\frac{1}{2}$% ;	69. $12\frac{1}{2}$%লাভ ;	70. 300 টাকা ;

প্রশ্নমালা 2

1. $\frac{2}{9}$; 2. $\frac{3}{16}$; 3. $\frac{1}{12}$; 4. $\frac{5}{28}$; 5. $1\frac{4}{21}$;
6. $\frac{1}{12}$; 7. $\frac{1}{16}$; 8. $\frac{2}{9}$; 9. $\frac{5}{28}$; 10. $\frac{5}{16}$;
11. $\frac{7}{30}$; 12. $\frac{3}{4}$; 13. $\frac{5}{78}$; 14. $\frac{16}{75}$, 15. $\frac{1}{196}$.

16. $\frac{2}{315}$; 17. $\frac{1}{4}$ কি. গ্রা. ; 18. $2\frac{1}{2}$ কি. গ্রা ;
19. $1\frac{1}{4}$ মিটার.

প্রশ্নমালা 3

1. $4\frac{4}{5}$; 2. $5\frac{1}{4}$; 3. $4\frac{4}{7}$; 4. $20\frac{2}{5}$; 5. 96 ; 6. 60 ;
7. 80 ; 8. 56 ; 9. $98\frac{4}{7}$; 10. $26\frac{2}{11}$, 11. 540 ;
12. 8 সে. , 13. $217\frac{1}{2}$ মি. ; 14. 1 ঘ. ; 15. $\frac{8}{21}$;

প্রশ্নমালা

1. ·4, 1·2 ; 2. ·6, 1·8 ; 3. ·3, 6·3 ;
4. ·16, 2·4 ; 5. ·18, 12·6 ; 6. ·12, 109·2 ;
7. ·45, 4·5 ; 8. ·06, 18 ; 9. ·025, 1·5 ;
10. ·015, 1·5 ; 11. ·06, 18 ; 12. ·2, 312 ;
13. ·005, 10·5 ; 14. ·05, 1·8 ; 15. ·021, 264·6 ;
16. ·0001, ·03 ; 17. ·002, ·12 ; 18. ·1, 31·5 ;
19. ·1, 110·5 ; 20. ·11, 84·7 ; 21. ·08, 8 ;
22. ·07, 4·2 ; 23. ·06, 14·4 ; 24. ·05, 585 ;
25. ·3, 54 ; 26. ·24, 14·4 ; 27. ·016, 57·6 ;
28. ·16, 48 ; 29. ·13, 364 ; 30. ·125, 52·5 ;
31. ·004 ; 1564 ; 32. ·025 ; 225 ; 33. ·36, 324 ;
34. ·028 ; 35. 18 ;

প্রশ্নমালা 5.

1. 134 2. 209 3. 281 4. 389 5. 459 6. 507
7. 549 8. 603 9. 782 10. 953 11. 1234 12. 1243

13. 1679 14. 2354 15. 7589 16. 2003 17. 3005 18. 5007 19. 7009 20. 2780 21. 4950 22. 15100 23. 23000 24. 5438 25. 13579 26. 31623 27. 469246 28. 90017 29. 56007 30. 2501317 31. (i) 4. (ii) 1, (iii) 69, (iv) 44 32. 3983 33. 357, 2499 34. 25, 35. 11 36. 6724, 23534, 37. 72, 96 38. 67 টাকা 39. 625 40. 124 জন 41. 341 জন 42. 1300 জন 43. 1525 জন 44. 5 টাকা 45. 73 জন 46. 225 জন, 135 টাকা 47. 24 জন 48. 31, 23, 17 49. 900 50. ক 19, খ 29, গ 37.

প্রশ্নমালা 6.

1. 6 দিন
2. 24 দিন
3. 9 ঘণ্টা
4. 5 দিন
5. 8 দিন
6. ক 20 দিন, খ 60 দিন, গ 30 দিন
7. 18 দিন
8. $3\frac{3}{4}$ দিন, ক $\frac{15}{32}$ অংশ, খ $\frac{3}{8}$অংশ, গ $\frac{5}{32}$ অংশ
9. 12 দিন
10. 5 ঘণ্টা
11. 12 দিন
12. 7 দিন
13. 6 দিন
14. 6 দিন
15. 8 দিন
16. 16 দিন
17. 1, ঘ, 52 মি. 30 সে.
18. 20 ঘণ্টা
19. 1 ঘ. 30 মি.
20. 1 ঘ.
21. 7 ঘ. 30 মি.
22. 48 মিনিট
23. 45 মিনিট
24, 1 ঘ. 30 মি.
25. 12 মি. 30 সে.

প্রশ্নমালা 7

(ক)

1. 75 টাকা
2. 750 টাকা
2. 84 টা. 12 প.
4. 408 টা. 72 প.
5. 1080 টাকা
6. 7 টাকা
7. 52 টা. 50 প.
8. 126 টা. 36 প.
9. 257 টা. 50 প.

10. 702 টাকা 11. 247 টা. 50 প. 12. 49 টা. 60 প.
13. 163 টা. 32 প. 14. 290 টা. 43 প. 15. 1075 টা. 35 প
16. 60 টাকা 17. 306 টাকা 18. 134 টা. 75প.
19. 90 টা. 9 প. 20. 350 টা. 25 প. 21. 1216 টা. 48 প
22. 547 টা. 97 প. 22. 422 টা. 75 প. 24. 821 টা. 40 প.
25. 1091 টা. 34 প.

(খ)

1. 10 টাকা 2. 10 টা. 80 প. 3. 63 টাকা
4. 128 টাকা 5. 52 টাকা 6. 5 টা. 10 প.
7. 27 টাকা 8. 28 টা. 5 প. 9. 27 টা. 3 প.
10. 224 টাকা 11. 281 টা. 20 প. 12. 1294 টাকা
13. 569টা. 80 প. 14. 498 টাকা 15. 1470 টা. 30 প.

প্রশ্নমালা 8

1. 100 টাকা 2. 624 টাকা 3. 800 টাকা
4. 1200 টাকা 5. 7300 টাকা 6. 9000 টাকা
7. 24000 টাকা 8. 75 টাকা 9. 75 টাকা
10. 400 টাকা 11. 14400 টাকা 12. 336 টাকা
13. 5050 টাকা 14. 700 টাকা 15. 445 টাকা

প্রশ্নমালা 9

1. 1% 2. 4% 3. 5% 4. $3\frac{1}{8}$% 5. 4%
6. $5\frac{1}{2}$% 7. $6\frac{1}{4}$% 8. 10% 9. $2\frac{1}{2}$% 10. 4%
11. 6% 12. 5% 13. $7\frac{1}{2}$% 14. 8% 15. 430 টা. 6%

প্রশ্নমালা 10

1. $4\frac{1}{2}$ বৎসর 2. $1\frac{1}{2}$ বৎসর 3. $2\frac{1}{4}$ বৎসর 4. 1 দিন
5. 5 বৎসর 6. 6 বৎসর 7. 8 বৎসর 8. 7 বৎসর
9. 4 বৎসর 10. 5 বৎসর 11. 20 বৎসর
12. $12\frac{1}{2}$ বৎসর 13. 10 বৎসর 14. $8\frac{1}{3}$ বৎসর
15. 10 বৎসর।

প্রশ্নমালা 11

1. 262 টা. 50 প. 2. 510 টাকা 3. 555 টাকা
4. 400 টাকা 5. 225 টাকা 6. 10,000 টাকা
7. 156 টা. 25 প. 8. 200 টা., 5% 9. 550 টা., 5%
10. 800 টা., $7\frac{1}{2}$% 11. $4\frac{3}{4}$% 12. 4 বৎসর
13. 10 বৎসর 14. 40 বৎসর 15. 16 বৎসর

প্রশ্নমালা 12
(বিবিধ প্রশ্ন)

ভগ্নাংশযুক্ত রাশিমালার সরলীকরণ

1. $1\frac{1}{2}$ 2. 1 3. 3·56 4. 1 5. $\frac{1}{18}$

ভগ্নাংশের গ. সা. গু. ল. সা. গু.

1. $\frac{7}{60}$ 2. $\frac{1}{4}$ লিটার 3. $9\frac{3}{7}$ 4. 5 ঘণ্টা
5. $\frac{32}{81}$ 6. ·0052 7. ·5 8. 3·4
9. ·015 10. $\frac{5}{16}$

বর্গমূল

1. 27 2. 5 3. 17 টা. 50 প.
4. 3 5. 425 ও 25 6. 28004
7. 239 8. 2345 9. 375
10. 576

সময় ও কার্য

1. 2 দিন 2. 60 দিন 3. 36 দিন
4. 6 দিন 5. $16\frac{1}{8}$ দিন 6. 12 মিনিট
7. নল দুইটি একসঙ্গে খুলিয়া দিবার 4 মিনিট পরে।
8. 5 জন 9. 20 দিনে 10. 60 দিনে

সরল কুসীদ

1. 1000 টাকা 2. 2920 টাকা 3. 400 টাকা
4. 10% 5. 4000 টাকা 6. আসল 1400 টাকা, সুদের হার 7%
7. $6\frac{1}{4}$% 8. প্রত্যেক মূলধন 1800 টা.
9. 16 বৎসরে 10. 20 বৎসরে।

প্রথম অংশ : বীজগণিত

প্রথম অধ্যায়

উপক্রমণিকা

1. বীজগণিতের ইতিহাস :

ভারতবাসী হিসাবে ইহা আমাদের কাছে বিশেষ গৌরবের বিষয় যে, বর্তমানে বীজগণিত নামে পরিচিত অঙ্ক-শাস্ত্রটি আমাদের পূর্ব পুরুষদেরই সৃষ্ট। বীজগণিতের ইতিহাস হইতে যতদূর জানা যায় তাহাতে মনে হয় জ্যোতির্বিদ্যার নানাবিধ বাস্তব ও কাল্পনিক সমস্যার সমাধান করিতে গিয়া ভারতীয় জ্যোতির্বিদগণ সহস্রাধিক বৎসর পূর্ব্বে গণিতশাস্ত্রের এই শাখাটি আবিষ্কার করিয়াছিলেন। সেই সকল খ্যাতনামা জ্যোতির্বিদগণের মধ্যে বিহারের আর্য্যভট্ট (525 খ্রীঃ অঃ), উজ্জয়িনীর ব্রহ্মগুপ্ত (650 খ্রীঃ), মহীশূরের মহাবীরাচার্য্য প্রভৃতির নাম বিশেষ উল্লেখযোগ্য। ইহার পরও শ্রীধরাচার্য্য ও পদ্মনাভ প্রভৃতি পণ্ডিতেরা এই শাস্ত্রে গবেষণা করিয়া অসামান্য কৃতিত্ব প্রদর্শন করিয়া গিয়াছেন। লক্ষ্য করিবার বিষয় উপরিউক্ত মহাপুরুষগণ সকলেই জ্যোতিষশাস্ত্রজ্ঞ ছিলেন এবং জ্যোতিষশাস্ত্রের নানাবিধ সমস্যার সমাধান করিতে গিয়া বীজগণিতের অনুশীলন ও উৎকর্ষসাধন করিয়াছিলেন। ভারতীয় মনীষীরা তখন বীজগণিতকে ঠিক কি নামে অভিহিত করিতেন তাহা জানা যায় না। প্রাচীন পুঁথি পুস্তকে ব্রহ্মগুপ্তের লিখিত কুট্টক গণিতের উল্লেখ দেখিতে পাওয়া যায়। এই কুট্টক গণিতই সম্ভবতঃ বীজগণিতের প্রাচীনতম গ্রন্থ। দ্বাদশ শতাব্দীর মধ্যভাগে হিন্দু জ্যোতির্বিদ ভাস্করাচার্য্য দুই প্রকার গণিতের উল্লেখ করিয়া গিয়াছেন। একটি হইল

ব্যক্ত অপরটি অব্যক্ত। ভাস্করাচার্য প্রণীত বীজগণিত ও পাটীগণিত গ্রন্থদ্বয় তাঁহার কন্যা লীলাবতীর নামানুসারে লীলাবতী নামে পরিচিত। এই লীলাবতীতে আছে "গণিতম্ অঙ্কশাস্ত্রম্। তদ্দ্বিবিধম্। ব্যক্তম্ পাটীগণিতম্ অব্যক্তম্ বীজগণিতম্।" তখনকার দিনে এই সকল পুস্তকাদি সমস্তই সংস্কৃত ভাষায় ছন্দোবদ্ধ আকারে লিখিত হইত। সম্ভবত ভাস্করাচার্য্যই বীজগণিত কথাটি সর্ব্বপ্রথম ব্যবহার করেন। সমীকরণের বীজ নির্ণয় করিয়া কাল্পনিক প্রশ্নের সমাধান করা যায় বলিয়াই গণিতের এই শাখার নাম তিনি বীজগণিত রাখিয়াছিলেন বলিয়া মনে হয়।

ভারতবর্ষে যখন এই শাস্ত্র সম্পর্কে গবেষণা চলিতেছিল তখন আরব-দেশেও এই শাস্ত্রের চর্চা হইতেছিল। আরবের ইতিহাসে সেই সময় অতি গৌরবময় যুগ। শিল্পে বাণিজ্যে ও বিজ্ঞানে আরববাসীরা তখন উন্নতির উচ্চ শিখরে সমাসীন। বাণিজ্যের প্রয়োজনে তাহারা ভারতীয়দের সংস্পর্শে আসিয়া গণিত, সাহিত্য, দর্শন প্রভৃতি শাস্ত্রে জ্ঞানার্জন করিতে আরম্ভ করেন।

ভারতীয় হিন্দুগণের নিকট হইতে আরবগণ এবং আরবগণের নিকট হইতে ইয়োরোপীয় পণ্ডিতগণ এই শাস্ত্র শিক্ষা করেন। আরবদের মধ্যে বীজগণিতের প্রথম লেখক মহম্মদ ইবন মুসা (Md. ibn Musa Alkhowari Zmi 825 খ্রীঃ অঃ)। তিনি বীজগণিতের যে পুস্তকখানা রচনা করেন তাহার নাম "Al-Jabrwa'l Muquabalah." 1200 খ্রীষ্টাব্দে Pisa-নিবাসী Leonardo Bonacci দ্বারা ইহা সর্ব্বপ্রথম ইতালীতে প্রচারিত হয়। আরও প্রায় চারিশত বৎসর পরে 1557 খ্রীষ্টাব্দে Robert Recorde নামক একজন চিকিৎসক উহা ইংলণ্ডে প্রচার করেন।

মহম্মদ ইবন মুসা রচিত পুস্তক হইতেই ইয়োরোপীয়গণ এই শাস্ত্রের প্রথম পরিচয় লাভ করেন বলিয়া এই শাস্ত্রটি সেইখানে Almukabela,

Mukabel, Algebra প্রভৃতি নামে পরিচিত হয়। কালক্রমে প্রথম দুইটি নামের ব্যবহার হ্রাস পায় এবং বীজগণিত Algebra নামেই অভিহিত হইতে থাকে।

বীজগণিতে বর্ত্তমানে যে সকল চিহ্নাদি ব্যবহৃত হইয়া থাকে সেইগুলি অপেক্ষাকৃত আধুনিক কালের; বিখ্যাত ফরাসি গণিতজ্ঞ Descartes (1637 খ্রীঃ অঃ) ইহার প্রবর্ত্তক। তিনিই সর্ব্বপ্রথম বীজগণিতে অজ্ঞাত-রাশির পরিবর্ত্তে $x, y, z,$ প্রভৃতি এবং ধ্রুবক বা জ্ঞাতরাশির পরিবর্ত্তে a, b, c প্রভৃতি অক্ষর ব্যবহার করেন।

2. বীজগণিতের সহিত পাটীগণিতের সম্পর্ক।

পাটীগণিত এবং বীজগণিত উভয়েই সংখ্যা-বিজ্ঞান। উভয়ের মধ্যে পার্থক্য এইটুকুই যে, পাটীগণিতে যাবতীয় সংখ্যা প্রকাশ করা হয় 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 এই দশটি চিহ্ন বা অঙ্কের সাহায্যে কিন্তু বীজগণিতে সংখ্যাসমূহ প্রকাশ করিতে 1, 2, 3 প্রভৃতি অঙ্কের সহিত $a, b, c, d \cdots\cdots x, y, z$ প্রভৃতি ইংরেজী বর্ণমালার ও α (আলফা), β (বিটা), γ (গামা), δ (ডেলটা) ইত্যাদি গ্রীক বর্ণমালার অক্ষরসমূহ সংখ্যা-সূচক চিহ্ন বা প্রতীক রূপে ব্যবহার করা হয়। এইরূপ ব্যবহারের ফলে পাটীগণিত হইতে লব্ধজ্ঞান বীজগণিতে আমরা আরও ব্যাপকভাবে প্রয়োগ করিতে পারি। পরিমাণগত সম্পর্ক নির্ণয়ে প্রতীক ব্যবহারের দ্বারা বীজগণিত যথার্থই একটি নূতন দিগন্ত বিস্তৃত করিয়াছে। বীজগণিতে পাটীগণিতের নিয়মগুলি চিহ্ন বা প্রতীকের সাহায্যে সংক্ষেপে প্রকাশ করা যায় এবং ইহার ফলে অতি সহজে ও স্বল্প সময়ে পাটীগণিতের অনেক দুরূহ প্রশ্নের সমাধান করা যায়। এই কারণে সার আইজাক নিউটন বীজগণিতকে নিখিল পাটীগণিত (Universal Arithmetic) আখ্যা দিয়াছিলেন। পাটীগণিতে প্রত্যেক অঙ্কের নির্দিষ্ট মান আছে কিন্তু

বীজগণিতে বর্ণমালার যে অক্ষরগুলি ব্যবহার করা হয় তাহাদের কোন নির্দিষ্ট মান নেই। ইহাদের প্রত্যেকটির প্রয়োজনানুযায়ী যে-কোন মান ধরা যাইতে পারে এবং প্রত্যেক অক্ষরই যে কোন সংখ্যার পরিবর্তে ব্যবহার করা যাইতে পারে। তবে একটি বিষয় মনে রাখিতে হইবে যে, একবার কোন অক্ষরকে একটি নির্দিষ্ট মান দিলে একই সমাধানে সেই অক্ষরটির অন্য কোন মান দেওয়া যাইবে না।

দ্বিতীয় অধ্যায়

পাটীগণিতের প্রশ্ন সমাধানে প্রতীকের ব্যবহার

3. ইতিপূর্বে বলা হইয়াছে যে, বীজগণিতে পাটীগণিতের নিয়মসমূহ ব্যাপকভাবে প্রযুক্ত হয় এবং ইহাতে পাটীগণিতের জ্ঞান প্রসারতা লাভ করে। ইহার দ্বারা সাধারণ ভাষায় প্রকাশিত বিভিন্ন রাশির মধ্যে পরস্পর সম্বন্ধ অতি সংক্ষেপে প্রকাশ করা যায়। ইহাই বীজগণিতের অতি প্রয়োজনীয় ব্যবহার। বীজগণিতীয় প্রতীক, অর্থাৎ অক্ষর এবং চিহ্নসমূহের দ্বারা উক্ত সম্বন্ধ সাংকেতিক আকারে প্রকাশ করা হয়। ইহাকে সাংকেতিক বাক্য বলে।

a b, c, x, y, z, প্রভৃতি সংখ্যাবাচক প্রতীক ব্যতীত অপরাপর যে সকল প্রতীক বা চিহ্ন বীজগণিতে ব্যবহৃত হয় তাহা পাটীগণিতে ব্যবহৃত চিহ্নাদির অনুরূপ। নিম্নে তাহার একটি তালিকা দেওয়া হইল।

$+$ যোগ চিহ্ন ($x+y$ এর অর্থ x এর সহিত y যোগ কর)

$-$ বিয়োগ চিহ্ন ($x-y$ এর অর্থ x হইতে y বিয়োগ কর)

$\times$ গুণ চিহ্ন ($x\times y$ এর অর্থ x কে y দ্বারা গুণ কর)

$\div$ ভাগ চিহ্ন ($x\div y$ এর অর্থ x কে y দ্বারা ভাগ কর)

$\sim$ অন্তর চিহ্ন ($x \sim y$ এর অর্থ x এবং y এর অন্তরফল অর্থাৎ উহাদের বৃহত্তরটি হইতে লঘুতরটির বিয়োগফল)

$=$ সাম্য চিহ্ন ($p=q$ এর অর্থ p ও q পরস্পর সমান)

$\equiv$ অভেদ চিহ্ন ($p \equiv q$ এর অর্থ p ও q সর্বোতভাবে সমান)

$\neq$ সমান নহে ($p \neq q$ এর অর্থ p ও q পরস্পর অসমান)

$>$ বৃহত্তর ($p>q$ এর অর্থ q অপেক্ষা p বৃহত্তর)

$<$ ক্ষুদ্রতর ($p<q$ এর অর্থ q অপেক্ষা p ক্ষুদ্রতর)

$\because$ ও $\therefore$ চিহ্ন দুইটি যথাক্রমে 'যেহেতু' ও 'সুতরাং' শব্দ দুইটির পরিবর্তে ব্যবহৃত হয়।

প্রথম শিক্ষার্থীদের পক্ষে বীজগণিতের প্রতীক ব্যবহার করিয়া সাংকেতিক বাক্য রচনা করা জটিল বলিয়া মনে হইতে পারে। নিম্নের দৃষ্টান্তগুলি হইতে এ বিষয়ে তাহাদের ধারণা পরিষ্কার হইবে।

উদাহরণ 1. মনে কর, একটি সরলরেখার দৈর্ঘ্য 4 সে মি. এবং অপর একটি সরলরেখার দৈর্ঘ্য 2 সে.মি. ; তাহা হইলে ঐ দুইটি রেখার একত্রে দৈর্ঘ্য হইবে $(4+2)$ সে.মি. $=6$ সে.মি.।

এখন যদি একটি রেখার দৈর্ঘ্য x সে.মি. এবং অপরটির দৈর্ঘ্য y সে.মি. হয় তাহা হইলে ঐ দুইটি সরলরেখার একত্রে মিলিত দৈর্ঘ্য হইবে $(x+y)$ সে.মি.। অর্থাৎ একটি রেখার দৈর্ঘ্যের সহিত অপরটির দৈর্ঘ্য যোগ করিলে উহাদের মিলিত দৈর্ঘ্য পাওয়া যাইবে। x ও y-এর যে-কোন মানের জন্য উপরোক্ত ফল সত্য হইবে।

উদাহরণ 2. মনে কর, তোমার পিতা প্রতি মাসে 500 টাকা আয় করেন এবং প্রতি মাসে 450 টাকা ব্যয় করেন। তাহা হইলে তোমার পিতার প্রতি মাসে $(500-450)$ টাকা $=50$ টাকা সঞ্চয় হয়।

এখন, যদি তোমার পিতার মাসিক আয় x টাকা এবং মাসিক মোট ব্যয় y টাকা হইত তাহা হইলে তোমার পিতার মাসিক সঞ্চয়ের পরিমাণ হইত $(x-y)$ টাকা। [x-এর মান y অপেক্ষা বৃহত্তর]

উদাহরণ 3. মনে কর, N. C. C.-এর প্যারেড করাইবার জন্য তোমাদের বিদ্যালয়ের কিছু ছাত্রকে প্রত্যেক লাইনে 15 জন করিয়া মোট 5টি লাইনে দাঁড় করানো হইল। এখন যদি জানিতে চাওয়া হয় যে, কত জন ছাত্র প্যারেড করিতেছে তাহা হইলে তোমরা সহজেই বলিতে পারিবে যে মোট (15×5) জন $= 75$ জন ছাত্র প্যারেড করিতেছে।

অনুরূপে যদি প্রত্যেক লাইনে a জন ছাত্র থাকে এবং এইরূপ b সংখ্যক লাইনে সকল ছাত্রকে দাঁড় করানো হয় তাহা হইলে মোট ছাত্রসংখ্যা হইবে $(a \times b)$ জন। a এবং b-এর যে কোন অখণ্ড ধনাত্মক মান হইতে পারে।

উদাহরণ 4. যে কোন আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল উহার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের গুণফলের সমান। আবার আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা উহার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের সমষ্টির দ্বিগুণের সমান। অর্থাৎ, কোন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 12 মিটারএবং প্রস্থ 10 মিটার হইলে ঐ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (12 \times 10)$ বর্গমিটার $= 120$ বর্গমিটার এবং পরিসীমা $= 2(12+10)$ মিটার $= (2 \times 22)$ মিটার $= 44$ মিটার। এবার মনে করিলাম, কোন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ যথাক্রমে x ও y মিটার।

সুতরাং এই আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= xy$ বর্গমিটার এবং পরিসীমা $= 2\ (x+y)$ মিটার। x এবং y-এর মান যাহাই হউক না কেন উপরোক্ত ফল সর্বদা সত্য হইবে।

উদাহরণ 5. ধরিলাম তোমার কাছে 85টি মার্বেল আছে। এই মার্বেলগুলিকে 10 জনের মধ্যে এইরূপে ভাগ করিয়া দিতে বলা হইল যাহাতে প্রত্যেকেই সর্বাধিক পূর্ণ-সংখ্যক মার্বেল পায়।

এখন 85, 10 দ্বারা বিভাজ্য না হওয়ায় প্রত্যেক-কে সর্বাধিক 8টি করিয়া মার্বেল দিবার পর আরও 5টি মার্বেল অবশিষ্ট থাকিবে। সুতরাং পাটীগণিতের নিয়মে $85=10\times 8+5$

অর্থাৎ, ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ

এখন যদি ভাজ্যকে D দ্বারা, ভাজককে d দ্বারা, ভাগফলকে Q দ্বারা এবং ভাগশেষকে R দ্বারা সূচিত করা যায় তাহা হইলে পাটীগণিতের উপরোক্ত সূত্রকে বীজগণিতে প্রতীকের সাহায্যে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়।

$D=d\times Q+R$;

ইহা দ্বারা কোন বিশেষ ভাগফল সম্পর্কে জানা যায় না বটে, কিন্তু ব্যাপকভাবে ভাজ্য, ভাজক ও ভাগশেষের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক কি তাহা জানা যায়।

এই সূত্রের D, d, Q ও R-এর মধ্যে যে-কোন তিনটির মান জানা থাকিলে অবশিষ্টটির মান অতি সহজেই নির্ণয় করা যাইতে পারে।

উদাহরণ 6. জোড় সংখ্যার সংক্ষিপ্ত আকার।

2, 4, 6, 8, 10 ইত্যাদি কতকগুলি জোড় সংখ্যা। এই সংখ্যাগুলি জোড় বলিয়া ইহারা প্রত্যেকেই 2-এর গুণিতক। অর্থাৎ, $2=2\times 1$, $4=2\times 2$, $6=2\times 3$, $8=2\times 4$ এবং $10=2\times 5$

এখন বীজগণিতে n দ্বারা যদি কোন অখণ্ড সংখ্যা প্রকাশ করা হয় তাহা হইলে $2n$ দ্বারা সাধারণ ভাবে যে-কোন জোড় সংখ্যাকে প্রকাশ করা যায়। n-এর মান 1, 2, 3, 4, 5 ইত্যাদি ধরিলে $2n$ দ্বারা যথাক্রমে 2, 4, 6, 8, 10 ইত্যাদি জোড় সংখ্যাগুলি পাওয়া যাইবে।

অনুরূপে $2n-1$ বা $2n+1$ দ্বারা যে-কোন বিজোড় সংখ্যাকে প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণ 7. তিনটি ক্রমিক জোড় বা বিজোড় সংখ্যার সংক্ষিপ্ত আকার

পাটীগণিতের সাহায্যে বলিতে পারা যায় 6, 8, 10 তিনটি ক্রমিক জোড় সংখ্যা এবং 5, 7, 9 তিনটি ক্রমিক বিজোড় সংখ্যা। কিন্তু 6, 8, 10 দ্বারা আমরা বিশেষ তিনটি জোড় সংখ্যা পাই এবং 5, 7, 9 দ্বারাও তিনটি বিশেষ বিজোড় সংখ্যা পাই। এক্ষেত্রে একটি বিষয় লক্ষণীয় যে, যে-কোন দুইটি ক্রমিক জোড় বা বিজোড় সংখ্যার মধ্যে ব্যবধান সর্বদা 2.

বীজগণিতে n দ্বারা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যাকে প্রকাশ করিলে $2n$ একটি জোড় সংখ্যা এবং $2n+1$ বা $2n-1$ একটি বিজোড় সংখ্যা প্রকাশ করিবে এ কথা পূর্বেই উল্লেখ করা হইয়াছে।

সুতরাং সাধারণ ভাবে যে-কোন তিনটি ক্রমিক জোড় সংখ্যাকে $2n$, $2n+2$, $2n+4$ দ্বারা বা $2n-2$, $2n$, $2n+2$ দ্বারা এবং যে-কোন তিনটি ক্রমিক বিজোড় সংখ্যাকে $2n-1$, $2n+1$, $2n+3$ দ্বারা সূচিত করা যাইতে পারে।

উদাহরণ 8. দুই অঙ্কের সংখ্যাকে বীজগণিতে প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ।

দুই অঙ্ক দ্বারা গঠিত যে-কোন সংখ্যাকে নিম্নলিখিত উপায়ে লেখা যায়।

যেমন, $86=80+6=8\times10+6$

$73=70+6=7\times10+3$

$54=50+4=5\times10+4$ ইত্যাদি।

উপরের সংখ্যাগুলির গঠন-কৌশল হইতে পাটীগণিতের নিয়মে বলা যাইতে পারে যে, দুই অঙ্ক দ্বারা গঠিত সংখ্যা = দশক স্থানীয় অঙ্ক × 10 + একক স্থানীয় অঙ্ক।

এক্ষণে দুই অঙ্ক দ্বারা গঠিত যে-কোন ধনাত্মক সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক y এবং দশক স্থানীয় অঙ্ককে x ধরিলে ঐ সংখ্যাটি হইবে $10x+y$।

অতএব $10x+y$ দ্বারা দুই অঙ্ক-বিশিষ্ট যে-কোন সংখ্যাকে প্রকাশ করা যাইবে।

যদি x-এর মান 8 এবং y-এর মান 2 ধরা যায় তাহা হইলে সংখ্যাটি হইবে $10\times8+2=82$

প্রশ্নমালা 1

1 হইতে 10 পর্যন্ত প্রশ্নগুলির মুখে মুখে উত্তর কর :

1. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 15 ; উহাদের একটি x হইলে অপরটি কত ?
2. দুইটি সংখ্যার বিয়োগফল 5 ; বৃহত্তর সংখ্যাটি y হইলে ক্ষুদ্রতরটি কত ? ক্ষুদ্রতরটি y হইলে বৃহত্তরটি কত ?
3. তোমার বর্তমান বয়স 12 বৎসর হইলে x বৎসর পরে তোমার বয়স কত হইবে ?
4. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য a মিটার এবং প্রস্থ b মিটার হইলে উহার ক্ষেত্রফল কত হইবে ?
5. একটি ঝুড়িতে 60টি কমলালেবু ছিল। উহা হইতে তুমি n-সংখ্যক লেবু তুলিয়া লইলে ; ঝুড়িতে আর কয়টি লেবু রহিল ?
6. দুইটি সংখ্যার গুণফল 25 ; একটি সংখ্যা n হইলে অপরটি কত ?
7. 1 টাকায় 100 পয়সা হইলে y টাকায় কত পয়সা ?
8. x-সংখ্যক বালক-বালিকার মধ্যে প্রত্যেককে y-সংখ্যক সন্দেশ দিতে হইলে তোমার হাতে কমপক্ষে কতখানা সন্দেশ থাকা চাই ?
9. n-সংখ্যক মার্বেল p-সংখ্যক বালকের মধ্যে সমান ভাবে ভাগ করিয়া দিলে প্রত্যেক বালক কয়টি করিয়া মার্বেল পাইবে ?
10. 1 দিস্তা কাগজের মূল্য x টাকা হইলে y টাকায় কত দিস্তা কাগজ পাওয়া যাইবে ?
11. একটি জলপূর্ণ পাত্রের ওজন x কিলোগ্রাম এবং শূন্য পাত্রের ওজন y কিলোগ্রাম হইলে জলের ওজন নির্ণয় কর।

12. p একটি অখণ্ড সংখ্যা। p-এর ঠিক আগের ও পরের অখণ্ড সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

13. y-সংখ্যক আম x জন বালক-বালিকার মধ্যে সমান সংখ্যায় ভাগ করিয়া দিবার পর n সংখ্যক আম অবশিষ্ট থাকিলে প্রত্যেক বালক বা বালিকা কয়টি করিয়া আম পাইবে?

14. উৎপলের বয়স x বৎসর পূর্বে y বৎসর ছিল। n বৎসর পরে উৎপলের বয়স কত হইবে?

15. x-কে কোন সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল y এবং ভাগশেষ z পাওয়া গেলে সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

16. যে কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা ; কোন একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে s, ভূমিকে b এবং উচ্চতাকে h দ্বারা সূচিত করিয়া প্রতীকের সাহায্যে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্রটি লিখ।

17. ঘণ্টায় p কিলোমিটার বেগে হাঁটিলে q কিলোমিটার পথ অতিক্রম করিতে কত সময় লাগিবে?

18. তুমি তোমার বাড়ী হইতে একখানা সাইকেলে প্রতি ঘণ্টায় u কিলোমিটার বেগে s কিলোমিটার যাইবার পর একটি দুর্ঘটনায় তোমার সাইকেলটি ভাঙ্গিয়া যাওয়ায় তুমি ঘণ্টায় y কিলোমিটার বেগে পায়ে হাঁটিয়া বাড়ী ফিরিয়া আসিলে। তুমি কমপক্ষে কত সময় বাড়ীর বাহিরে ছিলে?

19. সি. এম. ডি-এর একজন শ্রমিক যে দিন কাজ করে সেই দিন x টাকা করিয়া পায় কিন্তু সে যে দিন কাজ করিতে না আসে সে দিন y টাকা জরিমানা দিতে হয়। ঐ শ্রমিক 30 দিনের মধ্যে 10 দিন কাজে অনুপস্থিত থাকিলে, মাসের শেষে তার প্রাপ্য কত হইবে?

20. দুই অঙ্কের একটি সংখ্যার এককের অঙ্ক y এবং দশকের অঙ্ক x হইলে; সংখ্যাটি নির্ণয় কর। x-এর মান 5 এবং y-এর মান 4 হইলে ঐ সংখ্যার নির্দিষ্ট মানটি কত হইবে?

21. তিন অঙ্ক বিশিষ্ট কোন সংখ্যার সকলের বামদিকের অঙ্কটি x, মাঝখানেরটি y এবং ডানদিকেরটি z হইলে সংখ্যাটি কিরূপে লিখিবে?

22. $x=7$, $y=3$ এবং $z=5$ হইলে নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলিকে বীজগণিতীয় প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ কর।

(*a*) 75, (*b*) 57, (*c*) 305.

তৃতীয় অধ্যায়

ধনসংখ্যা ও ঋনসংখ্যা এবং লেখচিত্রের সাহায্যে উহাদের প্রকাশ

4. সংখ্যা ও রাশি ঃ

সংখ্যা কি তাহা সঠিক ভাবে জানিতে হইলে আগেই জানিতে হইবে রাশি কাহাকে বলে।

যাহা পরিমাপ যোগ্য অর্থাৎ সমজাতীয় বস্তুর সহিত তুলনা করিয়া যাহার পরিমাণ নির্দ্ধারণ করা যায় তাহাকে রাশি বলে। দৈর্ঘ্য, ওজন, সময়, দূরত্ব ইত্যাদি-বোধক শব্দের প্রত্যেকটিকে রাশি বলা যাইতে পারে, কারণ ইহাদের প্রত্যেকেরই পরিমাপ করা সম্ভব। এই পরিমেয় রাশিগুলিকে বদ্ধরাশি (Concrete quantity) বলে এবং রাশির পরিমাণ-বোধক সাধারণ সংখ্যাগুলিকে শুদ্ধরাশি (Abstract quantity) বা সাংখ্য রাশি অথবা শুধু সংখ্যা বলা হইয়া থাকে।

5. পরিমাপের একক ও বস্তুর মান ঃ

কোন রাশির পরিমাপের জন্য ঐ রাশির একটি সুবিধাজনক পরিমাণকে নিদিষ্ট মান ধরিয়া সমপ্রকার রাশির পরিমাপ করা হয়। এই নিদিষ্ট মানকে মাপের একক বলা হয়। সমগ্র বস্তুটি এই এককের যতগুণ সেই সংখ্যাটিকে সমগ্র বস্তুর সাংখ্য মান বা মান বলা হয়।

মনে কর, কিছু পরিমাণ চাউলের পরিমাপ করিতে হইবে। চাউলের কিছু অংশ স্থির রাখিয়া সমস্ত চাউল এই অংশের কত গুণ তাহা মাপিয়া দেখ। এক্ষেত্রে ঐ স্থির অংশটি চাউল পরিমাপের 'একক' এবং মোট চাউল উহার যতগুণ হইল তাহাই ঐ চাউলের মোট পরিমাণ। চাউলের বিভিন্ন অংশকে একক ধরিয়া ইহার মান বিভিন্ন সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা যাইবে। 15 কুইণ্টাল চাউল বলিলে বুঝিতে হইবে 1 কুইণ্টালকে একক

ধরা হইয়াছে। 1500 কিলোগ্রাম চাউল বলিলে বুঝিতে হইবে 1 কিলোগ্রামকে একক ধরা হইয়াছে।

বর্তমানে আমাদের দেশে দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের জন্য কিলোমিটার, মিটার, সেন্টিমিটার ইত্যাদি একক ব্যবহার করা হয়। পূর্বে গজ, ফুট, ইঞ্চির ব্যবহার প্রচলিত ছিল। এক মিটার লম্বা একখানি কাঠিকে একক ধরিয়া কোন দূরত্ব পরিমাপ করিয়া যদি দেখা যায় যে ঐ দূরত্ব কাঠিটির 10 গুণ তাহা হইলে ঐ দূরত্বকে 10 মিটার ধরা হইবে।

6. অখণ্ড ও খণ্ড সংখ্যা বা ভগ্নাংশ ঃ

সাধারণতঃ সংখ্যা বলিতে অখণ্ড ও খণ্ড বা ভগ্নাংশ উভয়কেই বুঝায়। যে সংখ্যা 1-কে একক ধরিলে ইহার কোনও সরল গুণিতক হয় সেই সংখ্যাকে অখণ্ড সংখ্যা ধরা হয়; অন্যথায় সেই সংখ্যাটিকে খণ্ড বা ভগ্নাংশ বলা হয়। যেমন, 8 সংখ্যাটি 1-এর সরল গুণিতক কিন্তু $\frac{5}{2}$ সংখ্যাটি 1-এর সরল গুণিতক নয় সুতরাং 8 একটি অখণ্ড সংখ্যা এবং $\frac{5}{2}$ একটি ভগ্নাংশ।

7. সাধারণ সংখ্যা (Common বা Natural number) ও নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা (Directed number) ঃ

পূর্বেই আলোচনা করা হইয়াছে যে কোনও একটি রাশির মধ্যে ঐ জাতীয় একক কতবার আছে তাহা বুঝাইবার জন্য সংখ্যা ব্যবহার করা হয়। মনে কর, তুমি বাজার হইতে কিছু চিনি কিনিয়া আনিলে ; কিন্তু কি পরিমাণ চিনি কিনিলে সে সম্পর্কে কিছু জানিতে পারা গেল না। এখন যদি বলা হয়, তুমি বাজার হইতে 12 কিলোগ্রাম চিনি কিনিয়া আনিয়াছ, তাহা হইলে 12 সংখ্যাটি কিলোগ্রামের সহিত যুক্ত থাকায় চিনির পরিমাণ সম্পর্কে যথার্থ ধারণা হইবে।

আবার মনে কর কেহ বলিল, "আজ বাজারে চিনির মূল্য কিছু পরিবর্তন হইয়াছে" ; এখন কত পরিবর্তন হইয়াছে বা কিরূপ পরিবর্তন হইয়াছে তাহা বুঝাইতে সে যদি শুধু 50 পয়সা বলে তাহা হইলে তাহার কথা সম্পূর্ণ

অর্থবোধক হইবে না। 50 পয়সা কমিয়াছে বা বাড়িয়াছে তাহা না বলা পর্যন্ত শুধু 50 পয়সার পরিবর্তন হইয়াছে বলিলে ইহার অর্থ স্পষ্ট প্রতীয়মান হয় না।

উপরি উক্ত 12 এবং 50 এই সংখ্যা দুইটির মধ্যে কিছু পার্থক্য আছে লক্ষ্য কর। প্রথম ক্ষেত্রে 12 কিলোগ্রামের 12 সংখ্যাটি একটি নির্দিষ্ট রাশির সাংখ্যমান প্রকাশ করে; কিন্তু দ্বিতীয় ক্ষেত্রে 50 পয়সার 50 সংখ্যাটির সহিত কমিয়াছে বা বাড়িয়াছে এই কথা যুক্ত না থাকিলে কিছু বুঝিতে পারা যায় না। এই দুই প্রকার সংখ্যার মধ্যে পার্থক্য নির্দেশ করিবার জন্য প্রথমটিকে সাধারণ সংখ্যা এবং দ্বিতীয়টিকে নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা বলে।

অতএব সাধারণ অর্থে ব্যবহৃত গণনামূলক সংখ্যাকে সাধারণ সংখ্যা এবং বিশিষ্ট অর্থে ব্যবহৃত সংখ্যাকে নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা বলা হয়।

নিয়ন্ত্রিত সংখ্যাগুলি সমজাতীয় রাশিকে প্রকাশ করিবার জন্য ব্যবহৃত হইলেও সেই রাশিগুলির মধ্যে প্রকৃতিগত পার্থক্য থাকিতে পারে।

নীচের দৃষ্টান্তগুলি হইতে এই পার্থক্য পরিষ্কার বুঝিতে পারা যাইবে।

(a) মনে কর, তোমার কাছে নিজস্ব 100 টাকা আছে এবং তোমার এক বন্ধুর কাছে অপরের নিকট হইতে ধার লওয়া 100 টাকা আছে। তোমাদের দুই বন্ধুর কাছেই 100 টাকা আছে বটে কিন্তু একজনের কাছে আছে নিজের সঞ্চিত টাকা এবং অপর জনের কাছে আছে ধার করা টাকা।

সঞ্চয় ও ঋণবোধক সংখ্যা সমজাতীয়। কিন্তু ইহারা তহবিল সম্পর্কে বিপরীত অবস্থার পরিচায়ক। এই কারণে ইহারা বিপরীত প্রকৃতিবিশিষ্ট বলিয়া বিবেচিত হয়।

মনে কর, উত্তর ও দক্ষিণ দিকে বিস্তৃত সোজা একটি রাস্তায় তোমরা দুই বন্ধু একই জায়গা হইতে যাত্রা করিলে এবং তুমি উত্তর দিকে 50 মিটার

অগ্রসর হইলে এবং তোমার বন্ধু দক্ষিণ দিকে 50 মিটার অগ্রসর হইল। তোমরা উভয়েই সমান দূরত্ব অতিক্রম করিলে বটে কিন্তু একে অন্যের বিপরীত দিকে। কারণ উত্তর ও দক্ষিণ দিক দুইটি পরস্পরের বিপরীত। এই কারণে 50 মিটার উত্তর ও 50 মিটার দক্ষিণ সমজাতীয় দুই বিপরীত প্রকৃতিবিশিষ্ট রাশি।

দুই জন লোক সমপরিমাণ মূলধন লইয়া পৃথক পৃথক ভাবে ব্যবসা আরম্ভ করিল এবং বৎসরান্তে একজনের 500 টাকা লাভ হইল এবং অপর জনের 500 টাকা ক্ষতি হইল। এই লাভ ও ক্ষতির মান সমান কিন্তু তাহারা বিপরীত প্রকৃতি-বিশিষ্ট।

উপরের দৃষ্টান্তগুলি হইতে বুঝিতে পারা যায় যে, লাভ এবং ক্ষতি, সঞ্চয় এবং ঋণ, হ্রাস এবং বৃদ্ধি, আয় এবং ব্যয় ইহারা সমজাতীয় নিয়ন্ত্রিত রাশি হইলেও বিপরীত প্রকৃতি-বিশিষ্ট।

বীজগণিতে বিভিন্ন প্রকৃতির নিয়ন্ত্রিত রাশিগুলির প্রকৃতিগত পার্থক্য প্রকাশ করিবার জন্য '+' ও '−' চিহ্ন দুইটি ব্যবহার করা হয়। এই চিহ্ন দুইটিকে উক্ত সংখ্যার ভেদচিহ্ন বলে। বিপরীত প্রকৃতির দুইটি রাশির যে-কোন একটিকে '+' চিহ্নের দ্বারা সূচিত করিলে অপরটিকে '−' চিহ্নের দ্বারা সূচিত করিতে হইবে।

8. '+' ও '−' চিহ্নের নূতন প্রকৃতি ঃ

পাটীগণিতে দুইটি সংখ্যার মধ্যে '+' চিহ্ন থাকিলে সংখ্যা দুইটিকে যোগ এবং '−' চিহ্ন থাকিলে সংখ্যা দুইটির প্রথমটি হইতে দ্বিতীয়টির বিয়োগফল বুঝায়। বীজগণিতে '+' ও '—' চিহ্ন দুইটি পাটীগণিতের ন্যায় শুধুমাত্র ক্রিয়াবাচক চিহ্নরূপেই ব্যবহৃত হয় না, বিপরীত প্রকৃতি বিশিষ্ট রাশির পার্থক্যসূচক চিহ্নরূপেও ব্যবহৃত হয়। ইহার ফলে মনে হইতে পারে একই চিহ্নের দুই প্রকারের ব্যবহার অসুবিধাজনক। তবে বাস্তবক্ষেত্রে

ইহাতে কোন অসুবিধা হয় না কারণ কখন কি অর্থে এই চিহ্ন দুইটি ব্যবহার করা হইয়াছে তাহা সহজেই বুঝিতে পারা যায়।

বীজগণিত ও পাটীগণিতের মধ্যে বিয়োগচিহ্নের ব্যবহারে আরও কিছু প্রভেদ আছে। তোমাদের জানা আছে যে, পাটীগণিতে একটি বৃহত্তর সংখ্যা হইতে উহা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সংখ্যা বিয়োগ করা যাইতে পারে ; কিন্তু কোন ক্ষুদ্রতর সংখ্যা হইতে উহা অপেক্ষা বৃহত্তর সংখ্যা বিয়োগ করা যায় না। অর্থাৎ পাটীগণিতে ঋণরাশির স্বাধীন ও স্বতন্ত্র অস্তিত্ব নাই। সুতরাং উহার কোনও ব্যবহারও নাই। বীজগণিতে ঋণরাশির স্বাধীন অবস্থান সম্ভব, তাই পাটীগণিত অপেক্ষা বীজগণিতে বিয়োগ-প্রক্রিয়া অনেক বেশী ব্যাপকতা লাভ করিয়াছে।

9. ধনসংখ্যা ও ঋণসংখ্যা

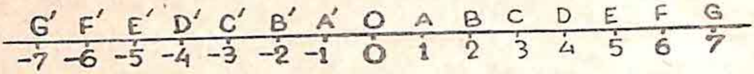
'+' চিহ্নযুক্ত কোন নিয়ন্ত্রিত সংখ্যাকে ধনসংখ্যা বা ধনাত্মক সংখ্যা এবং '−' চিহ্নযুক্ত কোন নিয়ন্ত্রিত সংখ্যাকে ঋণ সংখ্যা বা ঋণাত্মক সংখ্যা বলা হয়। এইজন্য '+' ও '−' চিহ্নদ্বয়কে ধনচিহ্ন ও ঋণচিহ্ন বলে। ব্যবহারের সময় ধনসংখ্যার আগে '+' চিহ্ন না বসাইলেও চলে কিন্তু ঋণসংখ্যার আগে '−' চিহ্ন অবশ্যই বসাইতে হইবে। ধনসংখ্যা ও ঋণ সংখ্যা অখণ্ড এবং ভগ্নাংশ দুইই হইতে পারে।

ভেদ চিহ্ন বর্জিত কোন রাশির সংখ্যাকে উহার পরম মান বলে। যেমন, $+12$ ও -12 উভয়েরই পরম মান 12

10. ধনসংখ্যা ও ঋণসংখ্যার লৈখিক চিত্র ঃ

যে-কোন অখণ্ড ধনসংখ্যা ও ঋণসংখ্যাকে একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত বিন্দুর দ্বারা দেখান যাইতে পারে।

উভয় দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত একটি সরলরেখার উপর O বিন্দুটি এমনভাবে লওয়া হইল যে উহা শূন্য সংখ্যাটির অবস্থান নির্দেশ করে।



এখন সরলরেখাটির উপর O বিন্দুর বাম দিকে A′, B′, C′, D′, E′, ′F, G′এবং O বিন্দুর ডান দিকে A, B, C, D, E, F, G বিন্দুগুলি এইরূপে স্থাপন করা হইল যাহাতে যে-কোন বিন্দু উহার ঠিক পূর্বের বা পরের বিন্দু হইতে 1 একক দূরত্বে অবস্থিত হয়। এখন O বিন্দু হইতে ডান দিকে অবস্থিত বিন্দুগুলির দূর ত্বকে ধনসংখ্যা ধরা হইলে O বিন্দুর বাম দিকে অবস্থিত বিন্দুগুলির দূরত্বকে ঋণসংখ্যা ধরিতে হইবে। সুতরাং চিত্র হইতে এই নিয়ম অনুসারে A, B, C, D, E, F, G বিন্দুগুলি O বিন্দু হইতে যথাক্রমে +1, +2, +3, +4, +5, +6 এবং +7 একক দূরত্বে অবস্থিত এবং A′, B′, C′, D′, E′, F,′ G′ বিন্দুগুলি O বিন্দু হইতে যথাক্রমে −1, −2, −3, −4, −5, −6 ও −7 একক দূরত্বে অবস্থিত। অসীম রেখার উপর O বিন্দুর ডান দিকে বা বাম দিকে পরস্পর হইতে 1 একক দূরত্বে স্থাপিত বিন্দুগুলির এক একটি বিন্দুদ্বারা মাত্র একটি ধনসংখ্যা বা ঋণসংখ্যা পাওয়া যাইবে। বিপরীত ক্রমে বলা যাইতে পারে যে, যে-কোন অখণ্ড ধনসংখ্যা বা ঋণসংখ্যার জন্যে ঐ রেখার উপর একটি এবং কেবল মাত্র একটিই নির্দিষ্ট বিন্দু পাওয়া যাইবে। আবার +8 এই ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যাটি O বিন্দুর ডান পাশে যত দূরত্বে অবস্থিত হইবে −8 এই ঋণসংখ্যাটি O বিন্দুর বাম পাশে ঠিক তত দূরত্বেই অবস্থিত হইবে।

সংখ্যাকে বিন্দুর সাহায্যে প্রকাশ করিবার এই প্রণালীকে সংখ্যার লৈখিক পরিচয় বলে।

মন্তব্য ঃ (i) বীজগণিতে ঋণসংখ্যা সম্পর্কে আরও এক প্রকার ধারণা করা হইয়া থাকে। পাটীগণিতে 6, 5, 4, 3, 2, 1 ইত্যাদি সংখ্যাগুলি এক করিয়া কমিতে কমিতে শূন্যতে যাইয়া শেষ হয়। অর্থাৎ পাটীগণিতে শূন্যই (0) ক্ষুদ্রতম ধনসংখ্যা। কিন্তু বীজগণিতে সংখ্যা শূন্যতে শেষ না হইয়া শূন্যের পরেও কল্পনা করা হইয়া থাকে। শূন্য হইতে কম হইলে সেই সংখ্যাকে ঋণ-সংখ্যা বা ঋণাত্মক সংখ্যা বলা হইয়া থাকে। যেমন, শূন্য হইতে 1 কম হইলে সেই সংখ্যা -1 দ্বারা, 2 কম হইলে সেই সংখ্যা -2 দ্বারা, 3 কম হইলে সেই সংখ্যা -3 দ্বারা সূচিত হইয়া থাকে।

(ii) **'0' চিহ্নের ইতিহাস ঃ**

আধুনিক কালে গণিতে সংখ্যা প্রকাশ করিবার জন্য '0' (শূন্যকে) একটি অঙ্ক ধরিয়া লইয়া সাধারণ অঙ্কগুলির মতই শূন্যকে ব্যবহার করা হয়।

1 হইতে 9 পর্যন্ত সংখ্যাজ্ঞাপক চিহ্নসমূহের ব্যবহার যেমন ভারতবর্ষেই প্রথম প্রবর্তিত হয়, শূন্য চিহ্নটির ব্যবহারও তেমন ভারতবর্ষেই প্রথম প্রবর্তিত হইয়াছিল। যদিও খ্রীষ্টীয় ষষ্ঠ শতাব্দীতে হিন্দু জ্যোতির্বিদ আর্যভট্ট প্রণীত আর্যভট্টিয়াম গ্রন্থে প্রথম সংখ্যাজ্ঞাপক চিহ্ন হিসাবে শূন্যের উল্লেখ পাওয়া যায় তথাপি প্রাচ্য ও পাশ্চাত্য পণ্ডিতগণের সুস্পষ্ট অভিমত এই যে, খ্রীষ্টপূর্ব প্রথম শতাব্দী হইতে তিনশত খ্রীষ্টাব্দের মধ্যে কোনও এক সময়ে ভারতীয়গণই শূন্য ব্যবহারের প্রণালীটি আবিষ্কার করিয়াছিলেন। '0' হইতে '9' পর্যন্ত এই দশটি চিহ্ন এবং উহাদের সাহায্যে সংখ্যা লিখনের যে পদ্ধতি বর্তমানে পৃথিবীর সর্বত্র প্রচলিত আছে তাহা দ্বাদশ শতাব্দীতে ভারত হইতে আরবে এবং পরে আরব হইতে ইয়োরোপের বিভিন্ন দেশে প্রচলিত হয়। কিন্তু তখনও ইয়োরোপে শূন্যজ্ঞাপক চিহ্ন হিসাবে '0' চিহ্নটি ব্যবহৃত হইত না। তখনকার দিনে কোন স্থানে অঙ্কের অভাব বুঝাইবার জন্য একটি বিন্দুর (.) ব্যবহার করা হইত। যেমন, 205 এই সংখ্যাকে লেখা হইত 2.5। কিন্তু ব্যবহারিক দিক হইতে অসুবিধা দেখা

দিবার ফলে বিন্দুর ব্যবহার লোপ পায়। কারণ কোন প্রকারে বিন্দুটি মুছিয়া গেলে মারাত্মক ধরনের ভুলের সৃষ্টি হইত। এই জন্যই বিন্দুর পরিবর্তে পরবর্তীকালে একটি ছোট ষড়ভুজ ব্যবহার করা হইত। এই চিহ্নটিই ক্রমে ক্রমে পরিবর্তিত হইয়া পরবর্তী কালে শূন্যের আকার ধারণ করিয়াছে। সুতরাং কোনও সংখ্যায় শূন্য থাকিলে বুঝিতে হইবে সংখ্যাটির সেই স্থানে এক হইতে নয় পর্যন্ত কোনও অঙ্ক নাই।

উদাহরণ 1. 24 লিটার দুধকে 3 দ্বারা প্রকাশ করিলে আয়তনের একক কত হইবে?

3 দ্বারা 24 লিটারকে প্রকাশ করিলে 1 দ্বারা 8 লিটারকে প্রকাশ করিতে হইবে। সুতরাং 8 লিটারকে আয়তনের একক ধরিতে হইবে।

উদাহরণ 2. দূরত্বের একক 5 মিটার ধরিলে, 40 কিলোমিটারের সাংখ্যমান কত হইবে?

40 কিলোমিটার = 40000 মিটার। এক্ষণে 5 মিটারকে একক ধরিলে 40000 মিটার 5 মিটারের 8000 গুণ বলিয়া 40 কিলোমিটারের সাংখ্যমান হইবে 8000।

উদাহরণ 3. প্লাবনের জলের 12 ইঞ্চি বৃদ্ধি বুঝাইতে যদি +12 লেখা হয় তাহা হইলে ঐ জলের 8 ইঞ্চি হ্রাস বুঝাইতে কত লিখিতে হইবে?

যেহেতু বৃদ্ধি ও হ্রাস সমজাতীয় কিন্তু বিপরীতার্থক তাই বৃদ্ধিকে '+' চিহ্ন দ্বারা সূচিত করিলে হ্রাসকে '−' চিহ্ন দ্বারা সূচিত করিতে হইবে। সুতরাং 8 ইঞ্চি হ্রাস বুঝাইতে −8 লিখিতে হইবে।

উদাহরণ 4. কোন ব্যক্তির 100 টাকা ব্যয় যদি +25 দ্বারা নির্দিষ্ট করা হয়, তাহা হইলে ঐ ব্যক্তির 200 টাকা আয় বুঝাইতে কত দ্বারা নির্দেশ করিতে হইবে?

যেহেতু আয় ও ব্যয় পরস্পর সমজাতীয় কিন্তু বিপরীতার্থ-বোধক তাই ব্যয় বুঝাইতে '+' চিহ্ন ব্যবহার করিলে আয় বুঝাইতে '−' চিহ্ন ব্যবহার

করিতে হইবে। এক্ষেত্রে 100 টাকা ব্যয়কে +25 দ্বারা প্রকাশ করা হইয়াছে। 100, 25-এর 4 গুণ : অতএব, 4 টাকাকে একক ধরা হইয়াছে। সুতরাং 200 টাকাকে প্রকাশ করিতে $200 \div 4 = 50$ সংখ্যাটি ব্যবহার করিতে হইবে।

অতএব 200 টাকা আয় বুঝাইতে −50 লিখিতে হইবে।

প্রশ্নমালা 2

1. 80 মিটার দূরত্বকে 16 দ্বারা প্রকাশ করিলে, দৈর্ঘ্যের একক কত হইবে?
2. 10 ঘণ্টা 30 মিনিটকে 21 দ্বারা প্রকাশ করিলে 15 দ্বারা কত সময় নির্দেশিত হইবে?
3. নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা কাহাকে বলে? নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির মধ্যে নিয়ন্ত্রিত সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

   5 জন ছাত্র, 25 টাকা ক্ষতি, 32 মিটার উচ্চ পাহাড়. 12 মিটার চওড়া রাস্তা, 40 কিলোগ্রাম চাউল, 486 টাকা আয়।
4. 234 টাকা লাভ যদি −234 দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তাহা হইলে 93 টাকা ক্ষতি কিরূপে প্রকাশ করা যাইবে?
5. কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর ঠিক পূর্বদিকে 80 মিটার দূরত্বকে +10 দ্বারা প্রকাশ করিলে ঐ বিন্দুর ঠিক পশ্চিম দিকে 240 মিটার দূরত্বকে কিসের দ্বারা প্রকাশ করিবে?
6. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলিকে লৈখিক চিত্রে বিন্দুর দ্বারা প্রকাশ কর।

   $3, 6, -5, -3, 0, -7, 8$
7. বিপরীতার্থক রাশি দ্বারা প্রকাশ কর:

   (*a*) দৈনিক 15 টাকা আয়, (*b*) 200 টাকা লাভ, (*c*) মধ্যাহ্নের 2 ঘণ্টা পূর্বে, (*d*) নববারাকপুর হইতে 10 মাইল উত্তরে, (*e*) বাজারে গমের দর 1 টাকা বেশী।

চতুর্থ অধ্যায়

ধনরাশি সংবলিত সাধারণ চারি নিয়ম

12. **বীজগণিতীয় রাশিমালা** (Algebraic expression) :

'+', '−', '×', '÷' এই ক্রিয়াসূচক চিহ্নগুলির দ্বারা সংযুক্ত অঙ্ক ও প্রতীকসমূহের অর্থবোধক সমাবেশকে বীজগণিতীয় রাশিমালা বলে। কখনও কখনও ইহাকে বীজগণিতীয় রাশি বা সংক্ষেপে শুধু রাশিও বলা হয়। এইসব রাশিমালার যে সকল অংশ যোগ অথবা বিয়োগ চিহ্নের দ্বারা সংযুক্ত তাহাদের প্রত্যেকটি অংশকে ঐ রাশিমালার পদ বলে। গুণ ও ভাগ চিহ্নের দ্বারা যুক্ত রাশিগুলিকে একটি মাত্র পদ বলিয়া ধরিতে হয়।

$2a \times b + 3c \div d - 4ef$ একটি বীজগণিতীয় রাশিমালা। এই রাশিমালায় তিনটি মাত্র পদ আছে। $2a \times b$ এই রাশিমালার প্রথম পদ। $3c \div d$ দ্বিতীয় পদ এবং $4ef$ তৃতীয় পদ।

13. **ধনপদ ও ঋণপদ** (Positive and Negative terms) :

যে-সকল পদের পূর্বে যোগচিহ্ন থাকে তাহাদের ধনপদ এবং যে-সকল পদের পূর্বে ঋণচিহ্ন থাকে তাহাদের ঋণপদ বলে। যে-কোনও রাশিমালার প্রথম পদের পূর্বে কোনও চিহ্ন বর্তমান না থাকিলে উহার পূর্বে একটি যোগচিহ্ন রহিয়াছে বলিয়া ধরিয়া নিতে হয়।

$a - b + c - d$ রাশিমালায় a ও c পদ দুইটি ধনপদ এবং $-b$ ও $-d$ পদ দুইটি ঋণপদ।

$2u - 3v - 4w \times xyz$ রাশিমালায় যে তিনটি পদ আছে তাহাদের মধ্যে $2u$ ধনপদ এবং $-3v$ ও $-4w \times xyz$ পদ দুইটি ঋণপদ।

14. **সহগ** (Co-efficient) :

কোনও বীজগণিতীয় সরল রাশির পূর্বে কোনও একটি রাশি গুণনীয়করূপে অবস্থিত হইলে শেষোক্ত রাশিটিকে প্রথমোক্ত রাশির সহগ বলা হয়।

$3a = 3 \times a$; সুতরাং $3a$ রাশিটিতে 3, a-র সহগ।

$xy = x \times y$; সুতরাং xy রাশিটিতে x, y-এর সহগ।

$7pqr$ রাশিটিতে pqr-এর সহগ 7, qr-এর সহগ $7p$ এবং r-এর সহগ $7pq$.

সুতরাং কোনও গুণফলের যে-কোনও গুণনীয়ককে অবশিষ্ট গুণনীয়ক-গুলির গুণফলের সহগ বলা যায়।

যে সহগ একটি মাত্র পাটীগণিতীয় অঙ্ক তাহাকে সংখ্যাত্মক সহগ (Numerical Co-efficient) বলে। $3a$ রাশিটিতে a-র সংখ্যাত্মক সহগ 3 ; কিন্তু যে-সহগ কেবলমাত্র সংখ্যাত্মক নহে তাহাকে আক্ষরিক সহগ (Literal Co-efficient) বলে।

$7pqr$ রাশিটিতে qr-এর সহগ $7p$ অথবা r-এর সহগ $7pq$ উভয়েই আক্ষরিক সহগ।

মন্তব্য 1. কোনও বীজগণিতীয় রাশির সংখ্যাত্মক সহগটি 1 হইলে তাহা উল্লেখ করা হয় না। x-এর সহগ 1 হইলে $1x$ না লিখিয়া শুধু x লেখাই প্রচলিত রীতি।

15. সদৃশ ও অসদৃশ পদ (Like and unlike terms) :

কতকগুলি পদের মধ্যে কোনও প্রভেদ না থাকিলে অথবা কেবলমাত্র তাহাদের সংখ্যাত্মক সহগগুলি পৃথক হইলে পদগুলিকে সদৃশ পদ বলে। অন্যথায় উহাদিগকে অসদৃশ পদ বলা হয়।

$7x$, $5x$, $3x$, x প্রভৃতি পদ কিংবা $5ab$, $3ab$, $2ab$, ab প্রভৃতি পদ সদৃশ পদ।

$3x$, $5a$, $2y$ প্রভৃতি পদ কিংবা x^3, x^2, x প্রভৃতি পদ অসদৃশ পদ।

16. সরল ও মিশ্র রাশিমালা (Simple and compound expressions) :

একটি মাত্র পদ লইয়া গঠিত রাশিকে সরল রাশি বা একপদ রাশি বলে। $2a$, $5xy$, $x \div y \times z$ পদ তিনটির প্রত্যেকটি সরল রাশি বা একপদ রাশি।

যে রাশিমালায় '+' ও '−' চিহ্নের দ্বারা একাধিক পদ যুক্ত থাকে তাহাকে মিশ্র রাশিমালা বলে। কোনও মিশ্র রাশিমালায় দুইটি মাত্র পদ থাকিলে তাহাকে দ্বিপদ রাশি বা সংক্ষেপে দ্বিপদ বলে। যেমন, $x+y$, $ab-cd$, প্রভৃতি দ্বিপদ রাশি।

কোনও মিশ্র রাশিতে তিনটি পদ থাকিলে উহাকে ত্রিপদ রাশি বা শুধু ত্রিপদ এবং তিনটির অধিক পদ থাকিলে উহাকে বহুপদ বলে। যথা, $a+2b-3c$ একটি 'ত্রিপদ' এবং $a+bc-d+ef$ একটি 'বহুপদ'।

17. গুণফল ও গুণনীয়ক :

দুইটি বা দুইটির অধিক সংখ্যাকে গুণ করিলে যে সংখ্যাটি পাওয়া যায় তাহাকে ঐ সংখ্যাগুলির গুণফল বলে এবং যে সংখ্যাগুলিকে গুণ করিয়া গুণফলটি পাওয়া গেল সেই সংখ্যাগুলির প্রত্যেকটিকে ঐ গুণফলের উৎপাদক বা গুণনীয়ক (Factor) বলে।

$3 \times x \times y \times z = 3xyz.$

এক্ষেত্রে $3xyz$ গুণফল এবং 3, x, y ও z উক্ত গুণফলের এক একটি গুণনীয়ক বা উৎপাদক।

18. ক্রমিক গুণফল (Continued product) :

একটি সংখ্যা a-কে অপর একটি সংখ্যা b দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধগুণফল ab-কে তৃতীয় আর একটি সংখ্যা c দ্বারা গুণ করিলে যে গুণফল পাওয়া যাইবে তাহাই a, b ও c-এর ক্রমিক গুণফল। এইরূপে তিন বা তদধিক

সংখ্যার ক্রমিক গুণফল নির্ণয় করা যাইতে পারে। সুতরাং দুইটির অধিক সংখ্যা পরপর গুণ করিয়া গেলে সর্বশেষ যে গুণফলটি পাওয়া যায় তাহাকেই ঐ সংখ্যাগুলির ক্রমিক গুণফল বলে এবং উক্ত সংখ্যাগুলির প্রত্যেকটিকে ক্রমিক গুণফলের গুণনীয়ক বলে। a, b ও c-এর ক্রমিক গুণফল abc এবং a, b ও c-এর প্রত্যেকটি abc-এর গুণনীয়ক।

19. চারি চিহ্ন ($+$, $-$, $\times$, $\div$) সম্বলিত রাশিমালার সমাধান।

পাটীগণিতে বহুপদবিশিষ্ট রাশিমালার মান নির্ণয় করিবার প্রয়োজন হইলে যোগ, বিয়োগ, গুণন ও ভাগের কার্যগুলি যে ক্রমে সম্পন্ন করা হয় বীজগণিতেও অনুরূপ রাশিমালার মান নির্ণয় করিবার সময় সেই একই ক্রম অনুসরণ করিতে হয়। কোনও রাশিমালায় কেবলমাত্র $+$ ও $-$ চিহ্ন থাকিলে কিংবা কোনও রাশি কেবলমাত্র $\times$ ও $\div$ চিহ্নের দ্বারা যুক্ত থাকিলে ঐ সকল চিহ্নের দ্বারা সূচিত ক্রিয়াগুলি বামদিক হইতে পরপর করিয়া যাইতে হয়। আর কোনও রাশিমালায় $+$, $-$, $\times$, $\div$ এই চারিটি চিহ্নই যদি বর্তমান থাকে তবে প্রথমে গুণ ও ভাগের কাজ সম্পন্ন করিয়া পরে যোগ ও বিয়োগের কাজ সম্পন্ন করিতে হয়।

একটি মাত্র সংখ্যা বুঝাইবার জন্য বীজগণিতে গুণচিহ্নটি উহ্য রাখা হয় এবং সংক্ষিপ্ত ভাগের চিহ্ন ব্যবহার করা হয়।

যেমন, $x \times y$ কে $x.y$ বা xy দ্বারা এবং $x \div y$ কে $\frac{x}{y}$ বা x/y দ্বারা প্রকাশ করার রীতি আছে।

$x \div y \times z$ রাশিটির মান নির্ণয় করিতে বলিলে বুঝিতে হইবে x-কে y দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফলকে z দ্বারা গুণ করিতে হইবে; কিন্তু $x \div yz$-এর মান নির্ণয় করিতে বলিলে বুঝিতে হইবে y এবং z-এর গুণফলের দ্বারা xকে ভাগ করিতে বলা হইয়াছে। কারণ yz-এর দ্বারা

একটি মাত্র সংখ্যা জ্ঞাপনের জন্যই y এবং z-এর মধ্যবর্তী গুণচিহ্নটি উহ্য রাখা হইয়াছে।

$x \div y \div z$ রাশিটির তাৎপর্য xকে y দ্বারা ভাগ করিয়া প্রাপ্ত ভাগফলকে z দ্বারা ভাগ কর। $x \div \frac{y}{z}$ রাশির তাৎপর্য yকে z দ্বারা ভাগ করিয়া প্রাপ্ত ভাগফলের দ্বারা x-কে ভাগ কর।

20. বৈজিক রাশির সাংখ্যমান

বৈজিক প্রতীকের পরিবর্তে বিভিন্ন প্রতিকল্প পাটীগণিতীয় সংখ্যা বসাইয়া বৈজিক রাশির সাংখ্যমান নির্ণীত হইয়া থাকে। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ দিয়া প্রতিকল্প স্থাপনের প্রণালীটি দেখান হইল।

উদাহরণ 1. $a=5,\ b=3$ ও $c=1$ হইলে $4a+3b-5c$-এর মান কত?

$4a=4\times5=20$ $\qquad\therefore\ 4a+3b-5c$
$3b=3\times3=9$ $\qquad=20+9-5$
$5c=5\times1=5$ $\qquad=24$

উদাহরণ 2. $a=6, b=4, c=5$ হইলে $4ab+5bc\times2ca\div abc$-এর মান নির্ণয় কর।

$4ab=4\times6\times4=96$ $\qquad\therefore\ 4ab+5bc\times2ca\div abc$
$5bc=5\times4\times5=100$ $\qquad=96+100\times60\div120$
$2ca=2\times5\times6=60$ $\qquad=96+6000\div120$
$abc=6\times4\times5=120$ $\qquad=96+50=146$

উদাহরণ 3. $a=10,\ b=5,\ c=2$ হইলে (i) $a\div b\times c$ ও (ii) $a\div bc$-এর মান নির্ণয় কর।

(i) $a\div b\times c$ $\qquad$ (ii) $a\div bc$
$=10\div5\times2$ $\qquad=10\div(5\times2)$
$=2\times2=4$ $\qquad=10\div10=1$

লক্ষ্য করিবে $b \times c$ এবং bc উভয়েই b এবং c-এর গুণফল সূচিত করিলেও $b \times c$ স্থলে b ও cকে দুইটি পৃথক সংখ্যা বলিয়া গণ্য করা হইয়াছে এবং bc স্থলে bc-কে b ও c-এর গুণফলজ্ঞাপক একটিমাত্র সংখ্যা বলিয়া ধরা হইয়াছে।

উদাহরণ 4. $a=12, b=6, c=4$ হইলে (i) $4a \div 2b \div c$ এবং (ii) $4a \div \frac{2b}{c}$ এর মান নির্ণয় কর

(i) $4a = 4 \times 12 = 48$ $\quad\therefore\ 4a \div 2b \div c$

$2b = 2 \times 6 = 12$ $\quad = 48 \div 12 \div 4$

$c = 4$ $\quad = 4 \div 4$

$= 1$

(ii) $4a \div \frac{2b}{c} = 48 \div \frac{12}{4} = 48 \div 3 = 16$

এক্ষেত্রেও লক্ষ্য করিবে $2b \div c$ এবং $\frac{2b}{c}$ একার্থক কিন্তু $2b \div c$ স্থলে $2b$ ও c-কে দুইটি পৃথক সংখ্যা বলিয়া এবং $\frac{2b}{c}$-কে একটি মাত্র সংখ্যা বলিয়া গণ্য করা হইয়াছে।

উদাহরণ 5. $x=8, y=5$ এবং $z=6$ হইলে $5x \div 2y \times 4z + 3x \times 2z + xyz$-এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা

$= (5 \times 8) \div (2 \times 5) \times (4 \times 6) + (3 \times 8) \times (2 \times 6) + (8 \times 5 \times 6)$

$= 40 \div 10 \times 24 + 24 \times 12 + 240$

$= 4 \times 24 + 288 + 240$

$= 96 + 288 + 240$

$= 624.$

উদাহরণ 6. যদি $x=8$, $y=12$ এবং $z=10$ হয় তবে

$\dfrac{x+y}{z}+\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}$ এর মান কত হইবে ?

প্রদত্ত রাশিমালা $=\frac{8+12}{10}+\frac{12+10}{8}+\frac{10+8}{12}$

$$=\frac{20}{10}+\frac{22}{8}+\frac{18}{12}$$

$$=\frac{2}{1}+\frac{11}{4}+\frac{3}{2}$$

$$=\frac{8+11+6}{4}$$

$$=\frac{25}{4}=6\frac{1}{4}.$$

প্রশ্নমালা 3

$a=16$, $b=2$, $c=4$, $d=8$ এবং $e=1$ হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :—

1. $a\div b\times c$
2. $a\div bc$
3. $a\times b\div c$
4. $a\div c\div b$
5. $a\div\dfrac{c}{b}$
6. $a\times b\div c\times d$
7. $a\times b\div cd$
8. $a\div b\div c\times d$
9. $a\div b\div cd$
10. $a\times b\div 4\times c$
11. $a\times b\div 4c$
12. $a\times b+c\times d$
13. $a\div b+d\div c$
14. $a\times b+d\div c$
15. $a\times b\times c+a\times b\div c+a\div b\times c+a\div b\div c$
16. $ab+bc+cd+de+ea-bcde$
17. $2a\times 8b\div 4\times c-2a\div 8\times b\times 4c-2a\div 8b\times 4c$
18. $4b\times 3c\div 2a\times d+8b\div 2c\times 3a\div d-8a\div 2c\div b\div d$
19. $4\times\dfrac{a-b}{c}+8\times\dfrac{c-b}{d}+16\times\dfrac{d-e}{a}$
20. $\dfrac{3a+2b+d}{c+e}\times bc+\dfrac{4b+3c+5e}{ab+bc}\times ca.$

21. ঘাত (Power) ও সূচক (Index) :

যে কোনও একটি রাশিকে ঐ রাশিটি দ্বারা একাধিকবার গুণ করিলে যে গুণফল পাওয়া যায় তাহাকে উক্ত রাশিটির ঘাত বলে। $x \times x$, $x \times x \times x$, $x \times x \times x \times x$ ইহাদের প্রত্যেকে x-এর একটি ঘাত।

$x \times x$-এর গুণফলকে x-এর বর্গ বা দ্বিঘাত বলে এবং উহাকে x^2 লেখা হয়।

$x \times x \times x$-এর গুণফলকে x-এর ঘন বা ত্রিঘাত বলে এবং উহাকে x^3 লেখা হয়।

$x \times x \times x \times x$-এর গুণফলকে x-এর চতুর্থ ঘাত বলে এবং উহাকে x^4 লেখা হয়।

কোন রাশির ঘাতে কয়টি গুণনীয়ক লওয়া হইয়াছে তাহা প্রকাশ করিবার জন্য ঐ রাশির ডানদিকে এবং সামান্য উপরে যে ছোট্ট অঙ্কটি লেখা হয় তাহাকে ঐ ঘাতের সূচক বলে।

x-এর দ্বিতীয় ঘাত $x \times x$ এর মধ্যে x দুইবার আছে বলিয়া উহাকে x^2, x-এর তৃতীয় ঘাত $x \times x \times x$-এর মধ্যে x তিনবার আছে বলিয়া উহাকে x^3 লেখা হয়। সুতরাং x^2-এর সূচক 2, x^3-এর সূচক 3.

অনুরূপে, a^7, a^{10}, a^n প্রভৃতি ঘাতের সূচকসমূহ যথাক্রমে 7, 10 ও n.

মন্তব্য : প্রথম শিক্ষার্থীকে সহগ এবং সূচকের প্রভেদ স্মরণ রাখিতে হইবে। $2a$ এবং a^2 এক রাশি নহে। $2a = 2 \times a$; $a^2 = a \times a$. সেইরূপ, $3x^2$ ও $2x^3$-ও একই রাশি নহে। $3x^2 = 3 \times x \times x$; $2x^3 = 2 \times x \times x \times x$.

22. মূল (Root) :

কোনও রাশিকে উহার যে-কোনও ঘাতের মূল বলা হয়। x, x^2-এর বর্গমূল, x^3-এর ঘন মূল, x^4-এর চতুর্থ মূল, x^5-এর পঞ্চম মূল, x^n-এর n-তম মূল।

বর্গমূলকে সাধারণতঃ '$\surd$' চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এই চিহ্নটিকে মূলচিহ্ন (Radical sign) বলে। 9-এর বর্গমূলকে $\surd 9$ লিখিতে হয় এবং 'বর্গমূল 9' পড়িতে হয়।

ঘনমূল, চতুর্থমূল, পঞ্চমমূল প্রভৃতি লিখিবার সাঙ্কেতিক চিহ্ন যথাক্রমে $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$ ইত্যাদি। যেমন x-এর ঘনমূল $\sqrt[3]{x}$, y-এর চতুর্থমূল $\sqrt[4]{y}$, a-এর n-তম মূল $\sqrt[n]{a}$.

কোনও সম্পূর্ণ রাশির মান বুঝাইতে হইলে একটি মাত্রা বা রেখাদ্বারা মূল চিহ্নটিকে প্রসারিত করিতে হয়। যেমন $\sqrt{abc}$ দ্বারা বুঝায় a, b ও c-এর গুণফলের বর্গমূল লইতে হইবে। একাধিক সংখ্যাকে মূলচিহ্নের অন্তর্ভুক্ত করিবার প্রয়োজন হইলে প্রথম বন্ধনীও ব্যবহার করা চলে; $\sqrt{a+b}$কে $\surd(a+b)$ও লেখা যায়।

23. মাত্রা (Dimension) ও মান (Degree):

কয়েকটি অক্ষর সমন্বিত কোনও গুণফলে যতগুলি অক্ষর থাকে তাহাদের প্রত্যেকটি অক্ষরকে উক্ত গুণফলের একটি মাত্রা বলে এবং উক্ত গুণফলে যতগুলি অক্ষর থাকে তাহাদের সমষ্টি সংখ্যাকে উক্ত গুণফলের মান বলে।

x^2y^3z রাশিটিতে ছয়টি মাত্রা আছে; কারণ $x^2y^3z = x \times x \times y \times y \times y \times z$ স্পষ্টতঃই x^2y^3z দুইটি x, তিনটি y ও একটি z এই ছয়টি অক্ষরের গুণফল। অতএব x^2y^3z রাশিটির মান 6 অর্থাৎ ইহা একটি ষষ্ঠ মানের রাশি। অনুরূপে $2a^4b^3c^2$-এর মাত্রা সংখ্যা 9 অর্থাৎ ইহা একটি নবম মানের রাশি। লক্ষ্য করিবে কোনও গুণফলের মাত্রা ও মান নির্ণয় করিবার সময় উহার সংখ্যাত্মক সহগটিকে হিসাবে ধরিতে হয় না। $2x^4$ রাশিটির মাত্রাসংখ্যা 4 এবং ইহা একটি চতুর্থ মানের রাশি।

মন্তব্য: 1. কোনও একটি বিশেষ অক্ষরের সম্পর্কেও কোনও গুণফলের

মাত্রা নির্দেশ করা যায়। $x^5y^4z^3$ গুণফলটির মাত্রা x অনুসারে 5, y অনুসারে 4 এবং z অনুসারে 3.

2. ইংরাজী Degree এবং Value এই উভয় শব্দেরই বাংলা প্রতিশব্দ হিসাবে মান কথাটি ব্যবহৃত হয়।

24. রাশিমালার মাত্রা (Dimension of an expression) :

কোনও মিশ্ররাশিতে বিভিন্ন মাত্রার পদ থাকিলে যে পদটির মাত্রা সর্বাধিক তাহার মাত্রাকেই মিশ্র রাশিমালাটির মাত্রা ধরা হয়।

যেমন, $a+ab+abc+abcd+abcde$ মিশ্ররাশিমালাটির মাত্রা 5 : কারণ, ইহার $abcde$ পদটি 5-মাত্রা-বিশিষ্ট এবং ঐ 5 মাত্রাই অপর চারিটি পদের মাত্রার তুলনায় সর্বোচ্চ মাত্রা।

রাশিমালাস্থ বিভিন্ন পদগুলি একই মাত্রার হইলে ঐ রাশিমালাকে সমমাত্র (Homogeneous) রাশিমালা বলে।

$a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$ একটি সমমাত্র মিশ্র রাশিমালা। কারণ, ইহার প্রত্যেকটি পদের মাত্রা 4।

25. রাশিমালার মান (Degree of an expression) :

কোনও মিশ্র রাশিমালায় যে পদটির মান সর্বাধিক সেই পদের যে মান তাহাকেই রাশিমালার মান বলিয়া ধরিতে হয়। যেমন, $x^6+x^4y+x^2y^2+y^3$ একটি ষষ্ঠমানের রাশিমালা ; কারণ, ইহার প্রথম পদটির মান 6, দ্বিতীয় পদের মান 5, তৃতীয় পদের মান 4, চতুর্থ পদের মান 3, এই মানগুলির মধ্যে 6 সংখ্যাটি বৃহত্তম বলিয়া রাশিমালাটিকে ষষ্ঠমানের রাশি বলা হয়।

26. অপেক্ষক (Function) **ও চল** (Variable) :

এক বা একাধিক অক্ষরযুক্ত কোনও বীজগণিতীয় রাশি বা রাশিমালাকে সেই অক্ষর বা অক্ষরসমূহের অপেক্ষক বলা হয়।

x^3+3x^2+4x+2, x-এর অপেক্ষক।

$x^4+2x^2y+4xy^2+y^4$, x ও y-এর অপেক্ষক।

$x^2+4y^2+z^2+4xy+4yz+2zx$ x, y ও z-এর অপেক্ষক।

$3a^2bc^3d$ a, b, c ও d-এর অপেক্ষক।

অপেক্ষকের অক্ষর বা অক্ষরসমূহকে চল বলে।

a^2+ab+b^2 একটি অপেক্ষক এবং a ও b উহার চল।

উদাহরণ 1. $a=2, b=1, c=4, d=3$ হইলে $2a^4b^3c^2d$-এর মান নির্ণয় কর।

$$2a^4b^3c^2d=2.\ 2^4.\ 1^3.\ 4^2.\ 3$$
$$=2\times16\times1\times16\times3$$
$$=1536$$

উদাহরণ 2. $a=25, b=16$ হইলে $3\sqrt{ab}$ এর মান কত হইবে?

$$3\sqrt{ab}=3\sqrt{25\times16}=3\times20=60$$

উদাহরণ 3. $x=9, y=16$ হইলে $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}+\sqrt{xy}+\sqrt{x}.y+x\sqrt{y}$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}+\sqrt{xy}+\sqrt{x}.y+x.\sqrt{y}$$
$$=\sqrt{9}+\sqrt{16}+\sqrt{9+16}+\sqrt{9\times16}+\sqrt{9}.16+9.\sqrt{16}$$
$$=3+4+5+12+48+36=108$$

$\sqrt{x}+\sqrt{y}$ এবং $\sqrt{x+y}$-এর প্রভেদ লক্ষ্য কর। $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ এর মান এক্ষেত্রে $3+4=7$, $\sqrt{x+y}$-এর মান $\sqrt{9+16}=5$; আবার $\sqrt{x}.y$, $x\sqrt{y}$ এবং $\sqrt{xy}$-এর মধ্যেও পার্থক্য আছে।

$$\sqrt{x}.y=\sqrt{9}\times16=3\times16=48$$
$$x.\sqrt{y}=9\times\sqrt{16}=9\times4\ =36$$
$$\sqrt{xy}=\sqrt{9\times16}=3\times4\ =12$$

উদাহরণ 4. $x=2, y=5$ এবং $z=3$ হইলে, $\sqrt{3x^4y^2z}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\sqrt{3x^4y^2z}=\sqrt{3.2^4.5^2.3}$$
$$=\sqrt{3\times16\times25\times3}$$
$$=\sqrt{3^2\times4^2\times5^2}$$
$$=3\times4\times5=60$$

প্রশ্নমালা 4

মান নির্ণয় কর :— $(a=3,\ b=4,\ c=5)$

1. $2a^2b+3ab^2$ 2. $a^2b^4+b^2a^4$ 3. $a^3b^2c+b^3c^2a+c^3a^2b$
4. $a^4+b^4c^4-2a^2b^2+2b^2c^2-2c^2a^2$.
5. $a+b^2+c^4+2a^2b-3b^2c+4c^2a$
6. $x=3,\ y=2,\ z=1$ হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর।
   (i) x^y, (ii) y^x, (iii) z^y, (iv) x^{y-z}, (v) y^{-y},
   (vi) x^{2y-z}, (vii) y^{2x-3z}.

মান নির্ণয় কর :— $(x=9,\ y=16,\ z=25)$

7. $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ 8. $\sqrt{x+y}+\sqrt{z}$
9. $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}$ 10. $\sqrt{x}.y+\sqrt{y}.x+\sqrt{y}.z$
11. $7\sqrt{x}+3\sqrt{y}-5\sqrt{z}$ 12. $\sqrt{(x+y)}+\sqrt{(9y+z)}+\sqrt{(9z+11x)}$
13. (i) $\sqrt{6y+4z}$ (ii) $6y+\sqrt{4z}$ (iii) $6\sqrt{y}+4\sqrt{z}$
14. $\sqrt{x^2y^4z}-\sqrt{x^4yz^2}$
15. $x=36$ ও $y=16$ হইলে প্রমাণ কর যে
$$\sqrt{x+4y}+x+\sqrt{4y}+\sqrt{x}+4\sqrt{y}=76$$
16. $12a^4b^3c^2$ রাশিটির মাত্রা কত ?
17. $x^3y^2z,\ 2x^4y^3z^2,\ 5x^2y^2z^2,\ 9xy^5z^3$ রাশিগুলির মাত্রা নির্দেশ কর। ইহাদের মধ্যে কোন্ কোন্ রাশি সমমাত্র ?
18. নিম্নলিখিত রাশিমালা দুইটির কোন্‌টি কোন্ মানের নির্ণয় কর।
   (i) $5a^3b^2+6ab^2-7a^4+3a^2b^4$
   (ii) $3a^4b^4-4ab+10a^2b^2-6a^2b^3$

সাধারণ চারি নিয়মে ঋণসংখ্যার ব্যবহার

27. পাটীগণিতে ঋণরাশির স্বতন্ত্র কোনও ব্যবহার না থাকায় কেবল-মাত্র ধনরাশি লইয়াই আলোচনা করা হয়। এই কারণে পাটীগণিতের যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ প্রক্রিয়া বহুল পরিমাণে সীমাবদ্ধ। বীজগণিতে ধন ও ঋণ উভয় প্রকার রাশি ব্যবহৃত হইয়া থাকে। ফলে বীজগণিতে যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ প্রক্রিয়ার তাৎপর্য পাটীগণিতের ঐ সকল প্রক্রিয়া সমূহের তাৎপর্য হইতে ব্যাপকতর।

প্রথম শিক্ষার্থীর পক্ষে ঋণসংখ্যার ব্যবহার জটিল বলিয়া মনে হইতে পারে বলিয়া পাটীগণিতে প্রচলিত নিয়মগুলির সহিত সঙ্গতি রাখিয়া বীজগণিতে এই নিয়মগুলি কিভাবে ব্যবহার করা যাইতে পারে সেই সম্পর্কে এই অধ্যায়ে বিস্তারিত আলোচনা করা হইবে।

28. **ধনসংখ্যার সহিত ঋণসংখ্যার যোগ:**

একটি সরলরেখার কোন শূন্য বিন্দু 0 হইতে সম ব্যবধানে উপরের দিকে $+1$, $+2$, $+3$, $+4$, $+5$, $+6$, $+7$, $+8$,… প্রভৃতি ধনসংখ্যাগুলি এবং নিচের দিকে -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8…প্রভৃতি ঋণ-সংখ্যাগুলি চিহ্নিত করা হইল।



(i) $(+2)$-এর সহিত $(+3)$ যোগ করিতে হইলে $+2$ চিহ্নিত বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া উপরের দিকে আরও তিন ঘর অগ্রসর হইলে $+5$ চিহ্নিত বিন্দু পর্যন্ত আসিতে হয়। সুতরাং $(+2)+(+3)=5$

(ii) $(+2)$-কে (-2)-এর সহিত যোগ করিতে হইলে -2 চিহ্নিত বিন্দু হইতে 2 ঘর উপরে অগ্রসর হইলে 0

বিন্দুতে আসিতে হয় এবং উহার মান শূন্য। সুতরাং $(+2)+(-2)=0$

(iii) $(+6)$-এর সহিত (-3) যোগ করিতে হইলে (-3) চিহ্নিত বিন্দু হইতে 6 ঘর উপরে অগ্রসর হইলে $(+3)$ চিহ্নিত ঘরে আসিতে হয়। সুতরাং $(+6)+(-3)=+3$.

29. দুইটি ঋণসংখ্যার যোগ ঃ

(-2)-এর সহিত (-4) যোগ করিতে হইলে পূর্ব অনুচ্ছেদের চিত্র হইতে দেখা যায় 0 চিহ্নিত বিন্দুর নীচে (-2) হইতে আরম্ভ করিয়া একই দিকে আরও 4 ঘর অগ্রসর হইলে (-6) চিহ্নিত বিন্দুতে আসিতে হয়। সুতরাং $(-2)+(-4)=-6$ অর্থাৎ উহাদের পরম মানের সমষ্টির পূর্বে ঋণ-চিহ্ন বসাইলেই দুইটি ঋণসংখ্যার সমষ্টি পাওয়া যাইবে।

$$\therefore \quad (-x)+(-y)=-(x+y)$$

অতএব দুইটি ঋণসংখ্যার সমষ্টি সর্বদা একটি ঋণসংখ্যা হইবে।

30. ঋণসংখ্যার বিয়োগ ঃ

বীজগণিতে ঋণসংখ্যার ব্যবহারের ফলে বিয়োগের সাধারণ প্রক্রিয়াটি একটি যোগের প্রক্রিয়ায় পরিণত হইয়াছে।

যেমন 6 হইতে 4 বিয়োগ করিলে এমন একটি সংখ্যা পাওয়া যায় যাহার সহিত 4 যোগ করিলে যোগফল 6 হয়।

অর্থাৎ, $6-4=6+(-4)=(-4)+(6)=2$.

আবার 4 হইতে -3 বিয়োগ করার অর্থ হইল এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় করা যাহার সহিত -3 যোগ করিলে যোগফল 4 হইবে।

পূর্ব অনুচ্ছেদের চিত্রে -3 চিহ্নিত বিন্দু হইতে 4 চিহ্নিত বিন্দুর দূরত্ব 7.

$$\therefore \quad 4-(-3)=4+3=7.$$

সুতরাং কোন ধনসংখ্যা হইতে অপর কোন ঋণসংখ্যা বিয়োগ করিতে হইলে শুধুমাত্র ইহার ঋণ চিহ্নটির পরিবর্তন করিয়া ধনসংখ্যাটির সহিত যোগ করিতে হইবে। নিয়ম-স্বরূপ বলা যাইতে পারে যে, দুইটি ঋণচিহ্ন একত্রে একটি যোগ চিহ্নে পরিণত হয়।

$$\therefore \quad x-(-y)=x+y.$$

মন্তব্য : দুইটি ঋণসংখ্যার যোগফল একটি ঋণসংখ্যা হয় কিন্তু বিয়োগফল সর্বদা ঋণসংখ্যা না-ও হইতে পারে।

যেমন, $-5-(-2)=-5+2=-3$ কিন্তু $-5-(-8)=-5+8=3$

উদাহরণ 1. (i) কোন ব্যবসায়ী প্রথমে 50 টাকা লাভ করিয়া পরে আরও 60 টাকা লাভ করিলে তাহার মোট $(+50)$ টা. $+(+60)$ টা. $=(+110)$ টা. অর্থাৎ 110 টাকা লাভ হয়। বন্ধনীর মধ্যস্থ '+' চিহ্নের দ্বারা নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা বুঝান হইয়াছে এবং দুইটি বন্ধনীর মধ্যস্থ '+' চিহ্নের দ্বারা যোগ ক্রিয়া বুঝান হইয়াছে।

(ii) প্রথমে 100 টাকা লাভ হইবার পরে 80 টাকা ক্ষতি হইলে, মোট$(+100)$ টা. $+$ (-80) টা. $=20$ টাকা লাভ হয়।

(iii) যদি প্রথমে 100 টাকা ক্ষতি এবং পরে আবার 80 টাকা ক্ষতি হয়, তাহা হইলে মোট (-100) টা. $+$ (-80) টা. $=(-180)$ টা. অর্থাৎ 180 টাকা ক্ষতি হয়।

উদাহরণ 2. (i) যদি তোমার কাছে 30 টাকা থাকে এবং তোমার বন্ধুর কাছে -20 টাকা থাকে তাহা হইলে তোমার কাছে তোমার বন্ধুর অপেক্ষা কত টাকা বেশী আছে ?

যেহেতু $30-(-20)=30+20=50$.

$\therefore$ তোমার কাছে 50 টাকা বেশী আছে।

প্রশ্নমালা 5

1. ধীমান 400 টাকায় একটি ঘড়ি কিনিয়া -50 টাকা লাভে বিক্রয় করিলে ঐ ঘড়িটির বিক্রয়মূল্য কত হইবে ?
2. তুমি বিদ্যালয়ের সাপ্তাহিক পরীক্ষায় প্রথমবার 70 নম্বর পাইলে। দ্বিতীয় ও তৃতীয় বারের পরীক্ষায় প্রথমবার হইতে যথাক্রমে $+10$ ও -15 বেশী নম্বর পাইলে। দ্বিতীয় ও তৃতীয় সপ্তাহে তোমার প্রকৃত প্রাপ্ত নম্বর কত ?
3. সমুদ্রতল হইতে কোন স্থানের উচ্চতা 300 মিটার। ঐ স্থান হইতে 400 মিটার নীচুতে অবস্থিত অপর একটি স্থানের উচ্চতা সমুদ্রতল হইতে কত মিটার হইবে ?
4. একজন সাইকেল আরোহী নব-বারাকপুর স্টেশন হইতে 800 কি. মিটার দক্ষিণে অবস্থিত কোন স্থানে যাইয়া পুনরায় একই দিকে আরও 700 কি. মিটার অগ্রসর হইয়া পরে ঐ স্থানের ঠিক উত্তরে আরও 600 কি. মিটার অগ্রসর হইলে ঐ ব্যক্তি নব-বারাকপুর স্টেশন হইতে কত দক্ষিণে রহিল ?

যদি $x=4$, $y=-5$ এবং $z=3$ হয়, তাহা হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :—

5. $x+y+z$. 6. $5y+2x+8z$. 7. $4y-3z+7x$.
8. $6x-5y+10z$. 9. $-10z-7y-5x$. 10. $2\cdot5x-8\cdot2y+7\cdot5z$.
11. হীরকের ঘড়িটি বিদ্যালয়ের ঘড়ি অপেক্ষা 5 মিনিট ফাস্ট। বিদ্যালয়ের ঘড়ি সঠিক সময় অপেক্ষা 10 মিনিট স্লো হইলে হীরকের ঘড়িটি সঠিক সময় হইতে কত মিনিট ফাষ্ট বা স্লো ?

31. ঋণসংখ্যা দ্বারা গুণন :

তোমরা জান যে, গুণন যোগেরই একটি সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়া মাত্র,

$\therefore$ $3\times5=3+3+3+3+3=15$. অনুরূপে, $(-3)\times3$
$=(-3)+(-3)+(-3)=-9$.

আবার, a ও b দুইটি ধনসংখ্যা হইল $a\times b=b\times a$; ঋনরাশি সম্বন্ধেও এই নিয়মটি প্রযোজ্য। $\therefore$ $3\times(-3)=(-3)\times3=-9$

স্মুতরাং, সাধারণভাবে বলা যাইতে পারে $a\times(-b)=(-b)\times a$
$=-ab.$

অর্থাৎ, একটি ধনসংখ্যার সহিত অপর একটি ঋণসংখ্যার গুণফল সর্বদা একটি ঋণসংখ্যা হইবে।

এখন একটি ঋণসংখ্যাকে অপর একটি ঋণসংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে গুণফল কি হইতে পারে তাহা নিম্নের আলোচনা হইতে বুঝিতে পারা যাইবে।

একটি ঋণসংখ্যা -5-কে ধনসংখ্যা 2 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল -10 হয়। অর্থাৎ, গুণফলটি ঋণসংখ্যা হয়। স্মুতরাং -5-কে -2 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল -10-এর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে। অর্থাৎ, $(-5)\times(-2)=10$ হইবে।

অতএব সাধারণভাবে বলা যায় $(-a)\times(-b)=ab$ অর্থাৎ, দুইটি ঋণসংখ্যার গুণফল একটি ধনসংখ্যা হইবে।

মন্তব্য : 1. পাটীগণিতের ন্যায় বীজগণিতেও দুইটি সংখ্যার মধ্যে '×' চিহ্নটি থাকিলে প্রথম সংখ্যাটিকে দ্বিতীয় সংখ্যাটি দ্বারা গুণ করিতে হইবে ইহাই বুঝায়। বীজগণিতে স্থলবিশেষে একটি বিন্দু (.) ব্যবহার করা হয়। আবার কখনও বা '×' বা (.) কোনটিই ব্যবহৃত হয় না। যেমন, $a\times b$, $a.b$ এবং ab এই তিন প্রকারেই a এবং b-র গুণফল প্রকাশিত হইয়া থাকে। পাটিগণিতে দুইটি অঙ্ক পাশাপাশি বসাইলে একটিকে অপরটি দিয়া গুণ করিতে হইবে এইরূপ বুঝায় না।

$54=50+4$; 5×4 নহে।

$a\times b$ এবং ab উভয়ক্ষেত্রেই a ও b-এর গুণ সূচিত হয় বটে কিন্তু $a\times b$ স্থলে a এবং b-কে দুইটি পৃথক সংখ্যা বলিয়া গণ্য করা হয় কিন্তু ab স্থলে a এবং bকে পৃথক সংখ্যা বলিয়া মনে না করিয়া একটি মাত্র সংখ্যা বলিয়া গণ্য করা হয়।

মন্তব্য : 2. যখন কোন অক্ষরকে কোন অঙ্ক দ্বারা গুণ করা হয়, তখন অঙ্কটিকে প্রথমে লিখিয়া অক্ষরটিকে পরে লিখিতে হয়। যেমন, $x\times2$-কে $x2$ না লিখিয়া $2x$ লিখিতে হয়।

32. ঋণসংখ্যা দ্বারা ভাগ :

নিম্নলিখিত আলোচনা হইতে ঋণসংখ্যা দ্বারা ভাগের অর্থটি বুঝিতে পারা যাইবে।

মনে কর, তোমরা কয়েক বন্ধুতে মার্বেল খেলিলে। এই খেলায় তুমি 20টি মার্বেল জিতিলে এবং তোমার এক বন্ধু তোমার অর্ধেক মার্বেল জিতিল ; তাহা হইলে তোমার বন্ধু 10টি মার্বেল জিতিবে।

অর্থাৎ $(+20)\div 2=+10$

আবার তুমি যদি 20টি মার্বেল হারিতে এবং তোমার বন্ধু তোমার অর্ধেক হারিত তাহা হইলে তোমরা বন্ধু হারিত 10টি। অর্থাৎ $(-20)\div 2=-10$। কারণ জিতিবার সংখ্যাকে + চিহ্ন দ্বারা সূচিত করিলে হারিবার সংখ্যাকে − চিহ্ন দ্বারা সূচিত করিতে হইবে।

অথবা ঋণসংখ্যা দ্বারা ভাগের নিয়মটি অন্য ভাবেও চিন্তা করা যাইতে পারে। যেহেতু $(-10)\times(-2)=20$ হয় ; সুতরাং বলা যাইতে পারে $+20)$-কে (-2) দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল হইবে সেই সংখ্যা যাহাকে (-2) দ্বারা গুণ করিলে গুণফল 20 হইবে। এখন, $(-2)\times(-10)=+20$; অতএব $(+20)$-কে (-2) দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল হইবে -10 ; অর্থাৎ $(+20)\div(-2)=-10$.

অনুরূপে, $(-12)\div(-3)=4$, কারণ (-3)-কে $(+4)$ দ্বারা গুণ করিলে গুণফল -12 হয়।

অতএব সাধারণ ভাবে বলা যাইতে পারে

$$a\div(-b)=-\frac{a}{b} \text{ এবং } (-a)\div(-b)=\frac{a}{b}$$

মন্তব্য : 1. ভাগ প্রক্রিয়ার চিহ্ন-সম্পর্কিত নিয়ম :

যদি $+a$ এবং $-b$ যথাক্রমে ধনসংখ্যা ও ঋণসংখ্যা হয়, তাহা হইলে,

(i) $(+a)\div(-b)=-\frac{a}{b}$ (ii) $(-b)\div(+a)=-\frac{b}{a}$

আবার $-a$ এবং $-b$ উভয়েই ঋণসংখ্যা হইলে,

(*iii*) $(-a)\div(-b)=\frac{a}{b}$ (*ix*) $(-b)\div(-a)=\frac{b}{a}$

33. শূন্যের ব্যবহার-বিধি :

(i) শূন্যের (0) সহিত কোন ধনসংখ্যার বা ঋণসংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ বা ভাগ ক্রিয়ার ফলাফলগুলি বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ।

মনে রাখিবে, শূন্যের সহিত কোন ধনসংখ্যা বা ঋণসংখ্যা যোগ করিলে সেই সংখ্যাটির মান ও চিহ্নের কোন পরিবর্তন হয় না। অর্থাৎ, $0+a=a+0=a$ এবং $0+(-a)=(-a)+0=-a$

(ii) কোন ধনসংখ্যা বা ঋণসংখ্যার সহিত 0-এর গুণফল সর্বদা 0 হইবে। অর্থাৎ, $a\times 0=0\times a=0\times(-a)=0$

(iii) ভাগের ক্ষেত্রে অর্থাৎ, a-কে 0 দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল কি হইবে তাহা নিম্নের আলোচনা হইতে বুঝিতে পারা যাইবে।

প্রকৃতপক্ষে একটি ধনসংখ্যা a-কে শূন্য দ্বারা ভাগ করিবার অর্থ হইল এমন একটী সংখ্যা নির্ণয় করা যাহাকে 0 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল a হইবে। কিন্তু এমন কোন সংখ্যা আছে কি যাহাকে 0 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল a হয় ? এই প্রশ্নের সাধারণ উত্তরে বলা যাইতে পারে যে, সেইরূপ কোন সংখ্যা নাই। কিন্তু গণিতের বিভিন্ন শাখায় কোন সংখ্যাকে 0 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফলটি কত হইবে তাহা ধার্য করিবার প্রয়োজন হয়। এই প্রয়োজনেই এই ভাগফলের একটি আসন্ন মান নির্ণয় করা হইয়াছে। তোমরা জান যে, ভাজ্যের মান অপরিবর্তিত থাকিলে ভাগফল ভাজকের মানের উপর নির্ভর করে। ভাজকটির মান বৃদ্ধি পাইতে থাকিলে ভাগফলের মাণ হ্রাস পাইতে থাকে ; আবার, ভাজকটির মান হ্রাস পাইতে থাকিলে ভাগফলের মান বৃদ্ধি পাইতে থাকে। যেমন, $\frac{64}{32}=2$; $\frac{64}{16}=4$. $\frac{64}{8}=8$; $\frac{64}{4}=16$; $\frac{64}{2}=32$ ইত্যাদি। এখন মনে কর a-কে কোনও একটি

সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিতে হইবে। এক্ষেত্রে ভাজ্যের অর্থাৎ, a-এর মান ঠিক রাখিয়া ভাজকের মান যত কমান যাইবে ভাগফলের মান ততই বৃদ্ধি পাইতে থাকিবে। ভাজকের মান এইরূপে যতই শূন্যের নিকটবর্তী হইতে থাকিবে ভাগফলের মানও ততই বৃদ্ধি পাইতে পাইতে পরিশেষে অত্যন্ত বৃহৎ বা অসীম হইয়া যাইবে। তখন ইহাকে অনন্ত (Infinity) বলা হয় এবং '∞' এই চিহ্নের দ্বারা সূচিত করা হয়।

সুতরাং, $\frac{a}{0}=\infty$ এবং $\frac{-a}{0}=-\infty$

অতএব, 0 ভিন্ন অপর কোন ধনাত্মক সংখ্যাকে 0 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল $+\infty$ এবং কোন ঋণাত্মক সংখ্যাকে ভাগ করিলে ভাগফল $-\infty$ হইবে।

$x=2$, $y=-4$ এবং $z=5$ হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :—

উদাহরণ 1. (i) xyz, (ii) $xz+yz$, (iii) $8xz-5x+2yz$.

(i) $xyz=2\times(-4)\times(5)=-8\times5=-40.$

(ii) $xz+yz=2\times5+(-4)\times5=10-20=-10.$

(iii) $8xz-5x+2yz=8\times2\times5-5\times2+2\times(-4)\times5$
$=80-10-40=80-50=30.$

উদাহরণ 2. (i) $2x^2+5y^2+3z^2$, (ii) $8x^3-10yz^2+4y^3$.

(i) $2x^2+5y^2+3z^2=2\times2^2+5(-4)^2+3(5)^2$
$=2\times2\times2+5\times(-4)\times(-4)+3\times5\times5$
$=8+5\times16+75=8+80+75=163.$

(ii) $8x^3-10yz^2+4y^3$
$=8(2)^3-10\times(-4)(5)^2+4(-4)^3$
$=8\times2\times2\times2-10\times(-4)\times5\times5+4(-4)\times(-4)(-4)$
$=64+40\times25+4\times(-4)\times16$
$=64+1000-256=1064-256=808$

উদাহরণ 3. (i) $5x \div z$, (ii) $10xy \div 2z$,
(iii) $(2x+5y) \div (5x-4z)$

(i) $5x \div z = 5 \times 2 \div 5 = 10 \div 5 = 2$

(ii) $10xy \div 2z = 10 \times 2 \times (-4) \div (2 \times 5) = -80 \div 10 = -8$

(iii) $(2x+5y) \div (5x-4z)$

$$= \frac{2 \times 2 + 5(-4)}{5 \times 2 - 4 \times 5} = \frac{4-20}{10-20} = \frac{-16}{-10} = \frac{8}{5}.$$

প্রশ্নমালা 6

গুণফল নির্ণয় কর :

1. (*i*) $4 \times (-10)$, (*ii*) $(-7) \times 15$, (*iii*) $(-16) \times (-8)$.

$x=1$, $y=-2$ এবং $z=-3$ হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির গুণফল নির্ণয় কর :

2. $xy \times yx$. 3. $(5yz - 3xy) \times 4yz$.

$a=3$, $b=-1$ এবং $c=-4$ হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

4. $ab - bc + ac$ 5. $abc + 2a + b^2$ 6. $3b^3 - 7a^2b + b^3c^2 - 2bc$

7. $x=-10$ হইলে y-এর মান নির্ণয় কর যখন $y = 4x^3 + 3x^2 - 2x$

ভাগফল নির্ণয় কর :

8. (*i*) $(-20) \div 5$, (*ii*) $18 \div (-6)$, (*iii*) $(-40) \div (-8)$.

$x=2$, $y=-4$ এবং $z=-8$ হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

9. $xy \div z$. 10. $10xy \div 2y + 5z \div 4x$.

11. $(x^2+y^2+z^2) \div (y^3+z^3)$ 12. $(3x+4z-x^2y^2) \div (xz-xyz)$

13. $(4x^3y - 3y^3z - 2z^3y - xyz - 8) \div (5x^2 - 9y^2 + 7z^2)$.

14. $w=1$, $x=-2$, $y=3$ এবং $z=4$ হইলে, $xy+yz+wz+wx$ এবং $xyz+yzw+wxy+wzx$-এর মান নির্ণয় কর।

15. $x=-8$ হইলে $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x-4}{x+4} + \frac{x-3}{x+3}$এর মান নির্ণয় কর।

16. $x=5$, $y=2$ এবং $z=-8$ হইলে $\frac{2x-3y+yz}{4x \div 2y \times z}$ এর মান নির্ণয় কর।

ষষ্ঠ অধ্যায়

সংযোগ নিয়ম, বিচ্ছেদ নিয়ম, বিনিময় নিয়ম, বন্ধনী অপসারণ ও স্থাপন

34. যোগের সংযোগ নিয়ম (Associative law) :

কতকগুলি রাশিকে পর পর যোগ করিয়া গেলে যে যোগফল পাওয়া যায়, রাশিগুলিকে যদৃচ্ছাক্রমে কতকগুলি করিয়া পৃথক পৃথক লইয়া যোগ করিয়া প্রাপ্ত যোগফলগুলি যোগ করিলেও সেই একই যোগফল পাওয়া যাইবে। যোগের এই নিয়মকে সংযোগ নিয়ম বলে।

যথা $8+(-5)+7+(-2)+6$ বাম দিক হইতে পরপর যোগ করিয়া গেলে

$$=3+7+(-2)+6$$
$$=10+(-2)+6=8+6=14$$

আবার প্রথম তিনটি পদ ও শেষ দুইটি পদ পৃথক পৃথক যোগ করিয়া প্রাপ্ত যোগফলগুলি যোগ করিলেও একই যোগফল পাওয়া যাইবে।

$$\{8+(-5)+7\}+\{(-2)+6\}$$
$$=\{3+7\}+(4)=10+4=14$$

আবার শেষের চারিটি পদ পূর্বে যোগ করিয়া ঐ যোগফলের সহিত প্রথম পদটি যোগ করিলেও একই যোগফল পাওয়া যাইবে।

$$8+\{(-5)+7+(-2)+6\}$$
$$=8+\{2+(-2)+6\}=8+6=14.$$

অতএব সাধারণ ভাবে বলা যাইতে পারে যে,

$$a+b+c+d=(a+b)+(c+d)=a+(b+c+d)$$
$$=(a+b+c)+d$$

35. যোগের বিনিময় নিয়ম (Commutative law) :

কতকগুলি রাশিকে ক্রমশঃ পর পর যোগ করিয়া যে যোগফল পাওয়া যায় রাশিগুলিকে যদৃচ্ছাক্রমে সাজাইয়া যোগ করিলেও সেই একই যোগফল পাওয়া যায়।

এই নিয়মকে যোগের বিনিময় নিয়ম বলে।

যথা, $8+(-5)+7+(-2)+6=7+(-5)+8+6+(-2)$
$=(-2)+6+(-5)+8+7$
$=6+7+(-2)+(-5)+8=14.$

36. গুণনের বিনিময় নিয়ম :

দুই বা ততোধিক রাশির গুণফল নির্ণয় করিতে হইলে, রাশিগুলিকে যে-কোন ক্রমে ইচ্ছামত সাজাইয়া গুণ করিলে প্রতিক্ষেত্রেই একই গুণফল পাওয়া যাইবে। এই নিয়মকে গুণনের বিনিময় নিয়ম বলা হয়।

যথা, $(-8)\times 6=6\times(-8)$ [$\because$ ইহারা প্রত্যেকে $=-48$]
আবার $(-3)\times(-4)\times 5=5\times(-4)\times(-3)$
$=(-4)\times(-3)\times 5=(-4)\times 5\times(-3)$
[$\because$ ইহারা প্রত্যেকে $=60$]

অতএব সাধারণভাবে বলা যাইতে পারে যে,
$a\times b\times c=a\times c\times b=b\times c\times a=c\times a\times b$ ইত্যাদি।

37. গুণনের সংযোগ নিয়ম :

কতকগুলি রাশিকে পর পর গুণ করিলে যে গুণফল পাওয়া যায়, রাশিগুলির কতকগুলি করিয়া এক সঙ্গে লইয়া পৃথক পৃথক গুণ করিয়া প্রাপ্ত গুণফলগুলিকে গুণ করিলে সেই একই গুণফল পাওয়া যায়।

এই নিয়মকে গুণনের সংযোগ নিয়ম বলা হয়।

যথা, $3\times(-4)\times(-5)\times6=\{3\times(-4)\}\times\{(-5)\times6\}$
$=\{3\times(-4)\times(-5)\}\times6=3\times\{(-4)\times(-5)\times6\}$

[$\because$ ইহাদের প্রত্যেকের মান$=360$]

অতএব সাধারণ ভাবে বলা যাইতে পারে,

$$a\times b\times c\times d=(a\times b)\times(c\times d)=(a\times b\times c)\times d$$
$$=a\times(b\times c\times d)$$

38. গুণনের বিচ্ছেদ নিয়ম ঃ

একটি মিশ্র রাশিমালাকে অপর একটি একপদ-বিশিষ্ট রাশি দ্বারা গুণ করিলে যত হয়, মিশ্র রাশিমালার পদগুলিকে উক্ত একপদ রাশি দ্বারা পৃথক পৃথক গুণ করিয়া গুণফলগুলির বীজগণিতীয় যোগফল লইলেও ঠিক তত হয়। এই নিয়মকে গুণনের বিচ্ছেদ নিয়ম বলে।

যথা, $5\times(8-10+3)=8\times5-10\times5+3\times5$

[$\because$ ইহারা প্রত্যেকে$=5$]

সাধারণ ভাবে বলা যায়, $a\times(b+c)=a\times b+a\times c.$

রাশিগুলি + ও − চিহ্নের দ্বারা যুক্ত হইলে সম্পূর্ণ রাশিমালাকে উহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি (Algebraic Sum) বলে।

39. ভাগের বিচ্ছেদ নিয়ম ঃ

কোন মিশ্ররাশিকে অপর একটি এক পদ রাশি দ্বারা ভাগ করিলে যে ভাগফল পাওয়া যায়, ভাজ্যের প্রত্যেক পদকে ভাজক দ্বারা ভাগ করিয়া আংশিক ভাগফল সমূহের বীজগণিতীয় যোগফল লইলে পূর্বের ভাগফলের সমান হইবে।

যেহেতু, $3(10+8)=3\times10+3\times8$, উভয় পক্ষের সমান রাশি দুইটিকে 3 দ্বারা ভাগ করিলে,

$$10+8=\frac{3\times 10+3\times 8}{3}=\frac{3\times 10}{3}+\frac{3\times 8}{3}$$

[$\because$ প্রত্যেকের মান $=18$]

অতএব সাধারণ ভাবে বলা যায় যে,

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

অনুরূপে, $$\frac{a+b+c+d+e}{x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}+\frac{d}{x}+\frac{e}{x}$$

মন্তব্য : 1. লক্ষ্য করিতে হইবে যে, $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$

কিন্তু $\frac{c}{a+b}\neq\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$ [$\neq$ এই চিহ্নটির অর্থ সমান নয়]

মন্তব্য : 2. মনে রাখিতে হইবে যে, ভাজ্যটি মিশ্ররাশি হইলে উহার প্রত্যেকটি পদকে ভাজক দ্বারা ভাগ করিতে হয়, কেবল মাত্র একটি পদকে ভাগ করিলে ভুল হইবে।

অর্থাৎ $\frac{a+b}{c}\neq\frac{a}{c}$ বা $\frac{a+b}{c}\neq\frac{b}{c}$

মন্তব্য : 3. প্রথম শিক্ষার্থীর বুঝিবার সুবিধার জন্য এই অধ্যায়ে আলোচিত সমস্ত নিয়মগুলির যাথার্থ্য কেবলমাত্র ধনরাশিরদ্বারা বিচার করা হইয়াছে। ঋণরাশির বেলাতেও এই নিয়মগুলি প্রযোজ্য।

40. বন্ধনী অপসারণ ও স্থাপন

তোমরা পাটীগণিতের বন্ধনীর ব্যবহার সম্পর্কে সকলেই পরিচিত। পাটীগণিতের ন্যায় বীজগণিতেও ( ), { }, [ ] এই তিনটি চিহ্নকে যথাক্রমে লঘু, ধনু এবং গুরু বন্ধনী বলা হয়। যখন কোন রাশিমালায় অনেকগুলি পদকে একটি বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন করা হয় তখন ঐ বন্ধনীর মধ্যস্থ পদগুলিকে রাশিমালার একটিমাত্র পদ বলিয়া মনে করিতে হয়।

যেমন $p+(q+r)a$ ইহা একটি দ্বিপদ রাশি। p এবং $(q+r)a$ এই দুইটি পদদ্বারা গঠিত। বন্ধনীটি না থাকিলে ইহা একটি ত্রিপদ রাশি হইত। অনেক ক্ষেত্রে বন্ধনীর পরিবর্তে কোন রাশির কয়েকটি পদের মাথায় একটি সরলরেখা টানা থাকে, ইহাকে রেখা বন্ধনী বলে। যে কয়টি পদের মাথায় একটি রেখা বন্ধনী থাকে তাহাদের একটি মাত্র পদ মনে করিতে হইবে। যেমন, $m+n-\overline{a-b}$ এবং $m+n-(a-b)$ দ্বারা একই রাশি প্রকাশিত হয়।

41. বন্ধনী অপসারণের নিয়ম ঃ

কোন রাশি হইতে বন্ধনী অপসারণের প্রয়োজন হইলে নিম্নলিখিত প্রণালী প্রয়োগ করিতে হইবে।

(i) কোন বন্ধনীর পূর্বে '+' চিহ্ন থাকিলে বন্ধনী-মধ্যস্থ রাশিমালার পদগুলির নিজ নিজ চিহ্ন পরিবর্তন না করিয়াই বন্ধনী অপসারণ করিতে হইবে। যেমন, $x+(y-z-w)=x+y-z-w$

(ii) কোন বন্ধনীর পূর্বে '−' চিহ্ন থাকিলে বন্ধনীর মধ্যস্থ রাশিমালার পদগুলির নিজ নিজ চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া বন্ধনী অপসারণ করিতে হইবে। যেমন, $x-(y-z+w)=x-y+z-w$

42. বন্ধনী স্থাপনের নিয়ম ঃ

কোন রাশির মধ্যে বন্ধনী স্থাপন করিবার প্রয়োজন হইলে নিম্নলিখিত প্রণালী প্রয়োগ করিাত হইবে।

(i) বন্ধনীর পূর্বে '+' চিহ্ন বসাইয়া যে-কোন সংখ্যক পদকে তাহাদের নিজ নিজ চিহ্নের পরিবর্তন না করিয়া বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন করা যাইতে পারে।

যেমন, $x+y-z+w=x+(y-z+w)=x+y+(-z+w)$

(ii) বন্ধনীর পূর্বে '−' চিহ্ন বসাইয়া যে-কোন সংখ্যক পদকে

তাহাদের নিজ নিজ চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন করা যাইতে পারে।

যেমন, $x+y-z+w=x-(-y+z-w)=x+y-(z-w)$

মন্তব্য : চিহ্ন পরিবর্তন বলিতে বুঝান হইতেছে যে '+' চিহ্নের পরিবর্তে '−' চিহ্ন এবং '−' চিহ্নের পরিবর্তে '+' চিহ্ন বসাইতে হইবে।

43. বন্ধনী অপসারণের ক্রম (order) :

কোন রাশিমালায় যখন একাধিক বন্ধনী যুক্ত থাকে, তখন উহাদিগকে অপসারিত করিতে হইলে প্রথমে সকলের ভিতরের বন্ধনী হইতে আরম্ভ করিয়া ক্রমশঃ একটি একটি করিয়া বন্ধনী অপসারণ করিতে হয়। অবশ্য এই নিয়মের বিপরীত উপায়েও বন্ধনী অপসারণ করা যাইতে পারে ; অর্থাৎ সর্বাপেক্ষা বাহিরের বন্ধনীর কাজ আগে করিয়া পরে এক একটি বন্ধনী এই নিয়মে অপসারিত করা যাইতে পারে।

উদাহরণ 1. $a-[b+c-\{d-(e-\overline{f-g})\})$

প্রদত্ত রাশিমালা,

$=a-[b+c-\{d-(e-f+g)\}]$ রেখা-বন্ধনী অপসারণ করিয়া

$=a-[b+c-\{d-e+f-g\}]$ প্রথম " " "

$=a-[b+c-d+e-f+g]$ ধনুর্বন্ধনী " "

$=a-b-c+d-e+f-g$ তৃতীয় " " "

আবার বিপরীত ক্রমেও প্রদত্ত রাশিমালা হইতে বন্ধনীসমূহ অপসারণ করা যায় ; অর্থাৎ, প্রথমে তৃতীয় বন্ধনী তৎপরে দ্বিতীয় বন্ধনী এই ক্রমে বন্ধনীগুলি অপসারণ করা যাইতে পারে।

যেমন, $a-[b+c-\{d-(e-\overline{f-g})\}]$

$=a-b-c+\{d-(e-\overline{f-g})\}$ তৃতীয় বন্ধনী অপসারণ করিয়া

$=a-b-c+d-(e-\overline{f-g})$ দ্বিতীয় বা ধনুর্বন্ধনী " "

$=a-b-c+d-e+\overline{f-g}$ প্রথম বন্ধনী অপসারণ করিয়া

$=a-b-c+d-e+f-g$ রেখা বন্ধনী " "

সুতরাং, প্রদত্ত রাশির বন্ধনী উভয় নিয়মে অপসারণ করিয়া একই মান পাওয়া গেল।

উদাহরণ 2. সরল কর: $-x-[-x+\{-x-(+x-\overline{x-1})\}]$

প্রদত্ত রাশিমালা $=-x-[-x+\{-x-(+x-x+1)\}]$

$=-x-[-x+\{-x-1\}]$

$=-x-[-x-x-1]$

$=-x+x+x+1$

$=x+1$

প্রথম রেখাবন্ধনী এবং তৎপরে পরপর প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বন্ধনী অপসারণ করিয়া প্রদত্ত রাশিমালাকে সরল করা হইয়াছে। প্রথম শিক্ষার্থীর পক্ষে ইহাই সুবিধাজনক।

উদাহরণ 3. $a+b+c-d+e-f$ রাশিমালার (i) প্রথম পদ ব্যতীত অন্যান্য পদগুলিকে বাহিরে বিয়োগ চিহ্ন দিয়া একটি তৃতীয় বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন কর; (ii) তৃতীয় বন্ধনীর মধ্যস্থিত পদগুলির শেষের চারিটি পদকে পূর্বে বিয়োগ চিহ্ন দিয়া একটি ধনুর্বন্ধনী বা দ্বিতীয় বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন কর; (iii) এইবারে ধনুর্বন্ধনীর মধ্যস্থিত চারিটি পদের শেষের তিনটিকে বাহিরে বিয়োগ চিহ্ন দিয়া একটি প্রথম বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন কর; (iv) অতঃপর প্রথম বন্ধনীর মধ্যস্থিত পদত্রয়ের শেষের দুইটিকে বাহিরে বিয়োগ চিহ্ন দিয়া একটি রেখা-বন্ধনীর অন্তর্ভুক্ত কর।

সমাধান: $a+b+c-d+e-f$

(i) $=a-[-b-c+d-e+f]$

(ii) $=a-[-b-\{c-d+e-f\}]$

(iii) $=a-[-b-\{c-(d-e+f)\}]$

(iv) $=a-[-b-\{c-(d-\overline{e-f})\}]$

প্রশ্নমালা 7

বন্ধনী অপসারণ করিয়া সরল কর :—

1. $(x+y+z)+(x-y-z)$.

2. $(x-y+z)-(x-y-z)$.

3. $(2a-5b)+(5a+4b)-(6a-2b)$.

4. $(x+y+z)-\{(y+z-x)-(y-z-x)-(z-x-y)\}$.

5. $2x-[-2x-\{-2x-(-x)\}]$.

6. $-[-\{-(-\overline{a-b)}\}]$

7. $y+z-[x+y-\{z+x-(y+z-\overline{x+y-z})\}]$

8. $(x+y)-[(y+z)-\{(z+x)-(\overline{z+x}-\overline{y+z})\}]$

9. $2a-2\{a-(b-a)\}-[b-2\{b-(a-b)\}]$।

$x=3,\ y=4,\ a=1,\ b=2$ হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর।

10. $a+2x-[b+2y-\{a-3x-(2b-4y)\}]$

11. $12x+3y+6b-\{x-(y+b)\}-\{3x-\overline{2y+5b}\}$.

12. $x+y-a-[b-\overline{x+y}-\{b+y-(x-\overline{y+a})\}]$

13. $a-b+c-d+e-f$ রাশিমালার দ্বিতীয় এবং তৃতীয় পদকে বাহিরে বিয়োগ চিহ্ন থাকে এইরূপ একটি বন্ধনীর ভিতর এবং চতুর্থ ও পঞ্চম পদকে বাহিরে যোগ চিহ্ন থাকে এইরূপ একটি বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন কর।

14. $a-b+c+d+e-f$ রাশিমালার (*i*) প্রথম হইতে তিনটি করিয়া পদ প্রথমে বিয়োগ চিহ্ন থাকে এইরূপ এক একটি ধনুর্বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন কর এবং (*ii*) এই দুইটি বন্ধনীর প্রত্যেকটির মধ্যস্থিত পদ তিনটির শেষের দুইটিকে পূর্বে বিয়োগ চিহ্ন বশিষ্ট এক একটি লঘু বা প্রথম বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন কর।

15. $a-b-c+d-e-f$ রাশিমালার প্রথম পদটি ব্যতীত অন্য পদগুলিকে বাহিরে বিয়োগ চিহ্ন দিয়া এক বন্ধনীভুক্ত কর এবং এই বন্ধনীর মধ্যস্থিত

শেষ চারিটি পদকে বাহিরে যোগ চিহ্ন দিয়া অপর আর একটি বন্ধনীর মধ্যে স্থাপিত কর। এইবারে অন্তর্বন্ধনীর মধ্যস্থিত শেষ তিনটি পদকে বাহিরে বিয়োগ চিহ্ন দিয়া তৃতীয় আর একটি বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন কর। অতঃপর এই তৃতীয় বন্ধনীর মধ্যস্থিত পদত্রয়ের শেষ দুইটিকে বাহিরে একটি বিয়োগ চিহ্ন দিয়া আর একটি বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন কর।

[একই অঙ্কে পর পর চারিটি বন্ধনীর ব্যবহার করিতে হইলে প্রথমে গুরু বন্ধনী বা তৃতীয় বন্ধনী ও পরে ধনুর্বন্ধনী বা দ্বিতীয় বন্ধনী, লঘু বা প্রথম বন্ধনী ও রেখা বন্ধনী ইত্যাদি ক্রমে ব্যবহার করাই সমীচীন।]

সরল ও মিশ্র রাশির যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগের নিয়মাবলী :

44. ধন ও ঋণ সংখ্যা সম্পর্কিত যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগের নিয়মাবলী পূর্বে অনুঃ (28—32) আলোচনা করা হইয়াছে। বর্তমান অধ্যায়ে যে কোন রাশির ক্ষেত্রে উপরোক্ত নিয়মগুলি ব্যাপক ভাবে আলোচনা করা হইবে।

45. যোগের সংজ্ঞা :

দুই বা ততোধিক রাশিকে একত্রিত করিবার প্রণালীকে যোগ বলে। রাশিগুলির প্রত্যেকটিকে যোজ্যরাশি এবং যোগ করিয়া যে রাশিটি পাওয়া যায় তাহাকে যোগফল বলে।

বিভিন্ন প্রকার রাশির যোগের নিয়ম সম্পর্কে নিম্নে আলোচনা করা হইল।

46. যোজ্য রাশিগুলির প্রত্যেকটি সরল, সদৃশ এবং ধনাত্মক :

যোজ্য রাশিগুলির প্রত্যেকটি সরল, সদৃশ এবং ধনাত্মক হইলে উহাদের যোগফলও একটি সদৃশ ধনাত্মক সরল রাশি হইবে। এবং যোগফলের সাংখ্য সহগ যোজ্য রাশিগুলির সাংখ্য সহগগুলির সমষ্টির সমান হইবে।

উদাহরণ : $2xy$, $9xy$ এবং $7xy$ এই রাশি তিনটির যোগফল নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিগুলি সদৃশ এবং প্রত্যেকেই ধনাত্মক বলিয়া উহাদের সমষ্টি

$$=2xy+9xy+7xy$$
$$=(2+9+7)\ xy=18xy.$$

অর্থাৎ বিভিন্ন সদৃশ পদগুলির সাংখ্য সহগের সমষ্টিই যোগফলে xy-এর সহগ হইবে।

47. যোজ্য রাশিগুলির প্রত্যেকটিই সরল, সদৃশ এবং ঋণাত্মক :

যোজ্য রাশিগুলি সদৃশ এবং ঋণাত্মক পদ হইলে উহাদের সমষ্টিও একটি সদৃশ ঋণাত্মক পদ হইবে। যোগফলের সাংখ্য সহগ যোজ্য রাশিগুলির সাংখ্য সহগগুলির সমষ্টির সমান হইবে।

উদাহরণ : $-5pq$, $-8pq$ এবং $-3pq$ ইহাদের যোগফল নির্ণয় কর।

এক্ষেত্রে যোজ্য রাশিগুলি প্রত্যেকেই সদৃশ ঋণাত্মক পদ। উহাদের সমষ্টি $=(-5pq)+(-8pq)+(-3pq)=-(5+8+3)pq=-16pq$

অতএব, উপরোক্ত দুইটি স্থলেই দেখা গেল, একই চিহ্নযুক্ত কতিপয় সদৃশ পদের সমষ্টি ঐ চিহ্নযুক্ত একটি সদৃশ পদ যাহার সাংখ্য সহগ উক্ত পদসমূহের সাংখ্য সহগের সমষ্টি।

48. সরল সদৃশ ধনাত্মক ও ঋণাত্মক পদের সমষ্টি :

কতকগুলি সদৃশ ধনাত্মক পদ ও ঋণাত্মক পদের সমষ্টি নির্ণয় করিতে হইলে পূর্বের নিয়ম অনুসারে প্রথমে ধনপদগুলির ও ঋণপদগুলির পৃথক পৃথক সমষ্টি নির্ণয় করিয়া লইতে হইবে। অতঃপর যোগফল দুইটির বৃহত্তর সাংখ্য সহগটির পরম মান হইতে ক্ষুদ্রতর সহগটির পরম মান বিয়োগ করিয়া প্রাপ্ত বিয়োগফলের পূর্বে বৃহত্তর রাশিটির চিহ্ন বসাইতে হইবে।

উদাহরণ 1. $7x, -2x, 5x$ ও $-3x$-এর সমষ্টি নির্ণয় কর।

এক্ষেত্রে ধনপদগুলির সমষ্টি $=7x+5x=12x$

এবং ঋণপদগুলির সমষ্টি $=(-2x)+(-3x)=-5x$

এই যোগফল দুইটির সহগদ্বয়ের পরম মানের অন্তর $=12-5=7$ এবং বৃহত্তর সহগটির চিহ্ন ধনাত্মক।

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=7x$.

মন্তব্য ঃ দুইটি বিপরীত চিহ্নযুক্ত রাশির সাংখ্য মান সমান হইলে উহাদের সমষ্টি শূন্য হইবে। যেমন, $5a+(-5a)=0$.

49. অসদৃশ রাশির যোগফল ঃ

অসদৃশ রাশিগুলির যোগফল, সদৃশ রাশির ন্যায়, যোজ্যপদের সাংখ্য সহগগুলির যোগফল নির্ণয় করিয়া নিধারণ করা সম্ভব নয়। বীজগণিতে বিভিন্ন অসদৃশ রাশির যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে উহাদিগকে যোগ চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করিয়া রাখিতে হয়। যেমন $2x, 3y$ ও $4z$-এর সমষ্টিকে $2x+3y+4z$ এবং $p-q$ ও r-এর সমষ্টিকে $p-q+r$ লিখিতে হয়। ইহা অপেক্ষা আর সরল করা যায় না।

50. বহুপদ রাশিমালা বা মিশ্র রাশিসমূহের যোগফল ঃ

যোজ্যরাশিগুলি একাধিক পদবিশিষ্ট হইলে উহাদের মধ্যে অবস্থিত শুধুমাত্র সদৃশ পদগুলিকে যোগ করিতে হইবে এবং অসদৃশ পদগুলিকে যোগ-চিহ্ন দ্বারা অন্যান্য রাশির সহিত যুক্ত রাখিতে হইবে।

মিশ্র রাশিগুলির যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে, রাশিমালাগুলিকে একটির নীচে অপরটিকে পর পর এমন ভাবে বসাইতে হয়, যাহাতে বিভিন্ন রাশিমালার সদৃশ পদগুলি একই স্তম্ভে পড়ে এবং অসদৃশ রাশিগুলি এক একটি পৃথক স্তম্ভে পড়ে। অতঃপর বাম দিক হইতে আরম্ভ করিয়া

প্রত্যেক স্তম্ভের যোগফল সর্বশেষ রাশির নিম্নে অঙ্কিত একটি সরলরেখার তলায় বসাইলে মিশ্র রাশিগুলির যোগফল পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ 1. $8x-5y+6z$, $2y-4z+7x$ এবং $-4x+3y+2z+5$ রাশিমালা তিনটির যোগফল নির্ণয় কর।

সদৃশ পদগুলিকে স্তম্ভক্রমে সাজাইয়া

প্রথম রাশি $= \quad 8x-5y+6z$
দ্বিতীয় রাশি $= \quad 7x+2y-4z$
তৃতীয় রাশি $=-4x+3y+2z+5$

প্রদত্ত রাশিগুলির যোগফল
$=11x+0+4z+5$
$=11x+4z+5$

ব্যাখ্যা : প্রথম স্তম্ভের পদগুলির যোগফল
$=8x+7x+(-4x)=11x$
দ্বিতীয় স্তম্ভের পদগুলির যোগফল
$=-5y+2y+3y=0$
তৃতীয় স্তম্ভের পদগুলির যোগফল
$=6z+(-4z)+2z=4z$
চতুর্থ স্তম্ভের একটিই মাত্র পদ $=5$

উদাহরণ 2. $5ab+2xy-3pq+m+n$ এবং $4pq-5xy+3ab+r+s$ রাশি দুইটির যোগফল নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=5ab+2xy-3pq+m+n+r+s$
দ্বিতীয় রাশি $=3ab-5xy+4pq$

প্রদত্ত রাশি দুইটির যোগফল
$=8ab-3xy+pq+m+n+r+s$

ব্যাখ্যা : চতুর্থ, পঞ্চম, ষষ্ঠ ও সপ্তম স্তম্ভে মাত্র একটি করিয়া অসদৃশ পদ আছে বলিয়া উহাদিগকে রেখার তলায় আলাদা আলাদাভাবে রাখা হইল।

প্রথম স্তম্ভের যোগফল $=$
$5ab+3ab=8ab$;
দ্বিতীয় স্তম্ভের যোগফল $=$
$2xy-5xy=33xy$
তৃতীয় স্তম্ভের যোগফল $=$
$-3pq+4pq=pq$

উদাহরণ 3. নিম্নলিখিত রাশিমালা চারিটির যোগফল নির্ণয় কর :

$$1{\cdot}5a^2b^2+6{\cdot}3b^2c^2+2{\cdot}1c^2a^2$$
$$3{\cdot}7a^2b^2+2{\cdot}4b^2c^2+4{\cdot}3c^2a^2$$
$$8{\cdot}6a^2b^2+7{\cdot}5b^2c^2+5{\cdot}2c^2a^2$$
$$4{\cdot}2a^2b^2+1{\cdot}8b^2c^2+6{\cdot}4c^2a^2$$

প্রথম রাশি
$=1{\cdot}5a^2b^2+6{\cdot}3b^2c^2+2{\cdot}1c^2a^2$
দ্বিতীয় রাশি
$=3{\cdot}7a^2b^2+2{\cdot}4b^2c^2+4{\cdot}3c^2a^2$
তৃতীয় রাশি
$=8{\cdot}6a^2b^2+7{\cdot}5b^2c^2+5{\cdot}2c^2a^2$
চতুর্থ রাশি
$=4{\cdot}2a^2b^2+1{\cdot}8b^2c^2+6{\cdot}4c^2a^2$

প্রদত্ত রাশিগুলির সমষ্টি
$=18a^2b^2+18b^2c^2+18c^2a^2$

ব্যাখ্যা : প্রথম স্তম্ভের পদগুলির যোগফল $=1{\cdot}5a^2b^2+3{\cdot}7a^2b^2+8{\cdot}6a^2b^2+4{\cdot}2a^2b^2=(1{\cdot}5+3{\cdot}7+8{\cdot}6+4{\cdot}2)a^2b^2=18a^2b^2$

দ্বিতীয় স্তম্ভের পদগুলির যোগফল $=6{\cdot}3b^2c^2+2{\cdot}4b^2c^2+7{\cdot}5b^2c^2+1{\cdot}8b^2c^2=(6{\cdot}3+2{\cdot}4+7{\cdot}5+1{\cdot}8)b^2c^2=18b^2c^2$

তৃতীয় স্তম্ভের যোগফল
$2{\cdot}1c^2a^2+4{\cdot}3c^2a^2+5{\cdot}2c^2a^2+6{\cdot}4c^2a^2=(2{\cdot}1+4{\cdot}3+5{\cdot}2+6{\cdot}4)c^2a^2=18c^2a^2$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিগুলির নির্ণেয় যোগফল
$=18a^2b^2+18b^2c^2+18c^2a^2$

প্রশ্নমালা 8

যোগফল নির্ণয় কর :—

1. $9a$, $6a$ এবং $5a$, 2. $12p$, $3p$ এবং $4p$. 3. $3xy$, $7xy$ এবং $5xy$
4. $-2ab$, $-3ab$ এবং $-6ab$. 5, $-8mn$, $-7mn$ এবং $-3mn$
6. $-3{\cdot}75bc$, $-4{\cdot}45bc$, $-5{\cdot}28bc$ এবং $-6{\cdot}52bc$
7. $5x-2y+3z$, $-9x+8y-5z$ এবং $6x-7y+2z$
8. $1{\cdot}5x+3{\cdot}2y-2{\cdot}8z$, ${\cdot}6x-1{\cdot}9y+3{\cdot}5z$ এবং $1{\cdot}9x-1{\cdot}3y-1{\cdot}7z$

9. $3+9ab-2bc,\ 6ab-8ac+8$ এবং $-3bc+7ac-2ab$

10. $14xy-10yz+19zx,\ 15xy+13yz-12zx$ এবং $-16xy+15yz+9zx$.

11. $9x^4+x^3y+4y^4,\ 12x^2y^2-x^3y-xy^3,\ xy^3-10x^2y^2+16y^4,\ 3x^4+6x^2y^2-8y^4$

12. $3\frac{3}{10}ax+4\frac{6}{25}by+8\frac{1}{4}cz,\ -3\frac{7}{10}ax+7\frac{2}{5}by-3\frac{3}{8}cz$ এবং $1\frac{2}{5}ax-10\frac{16}{25}by-3\frac{7}{8}cz$.

13. $\frac{1}{4}(2b+3c-a)$; $\frac{2}{5}(3a-b+2c)$ এবং $\frac{2}{3}(2a+3b-c)$ এই রাশি তিনটি যোগ কর এবং $a=20,\ b=-15$ এবং $c=10$ হইলে যোগফলের মান নির্ণয় কর।

14. $-\frac{1}{2}xy+\frac{3}{4}yz+zx,\quad -\frac{1}{2}xy-yz-\frac{7}{16}zx,\quad xy+\frac{1}{4}yz-\frac{9}{16}zx$

15. $\frac{1}{2}x^3+\frac{2}{3}x^2y-\frac{2}{5}xy^2+\frac{3}{7}y^3,\quad -\frac{1}{4}x^3+\frac{2}{3}x^2y+\frac{4}{5}xy^2-\frac{3}{7}y^3$ এবং $\frac{3}{4}x^3-\frac{1}{3}x^2y+\frac{3}{5}xy^2+y^3$

16. $\frac{11}{15}abx+\frac{2}{3}bcy+\frac{4}{5}caz,\ \frac{3}{5}abx-\frac{1}{5}bcy+\frac{4}{15}caz$ এবং $-\frac{1}{3}abx+\frac{8}{15}bcy-\frac{1}{15}caz$

17. $\cdot75a^4+\cdot5a^3+\cdot25a^2,\ 1\cdot5a^3-\cdot75a^2-\cdot5a^4,\ 1\cdot25a^4-2a^3+1\cdot5^2$ এবং $-1\cdot5a^4-a^2$

18. $\cdot5a^4-a^3b-\cdot35a^2b^2,\ \cdot55ab^3-\cdot65a^2b^2-\cdot25a^4,\ 1\cdot5a^3b+a^2b^2+b^4$ এবং $\cdot75a^4+\cdot5a^3b+\cdot45ab^3$.

সরল কর :—

19. $(3ax-6by)-(ax-2by)-(4ax-7by)+(2ax-3by)$

20. $(2ab-3bc+4ca)+(3bc-4ca+2ab)+(4ca-2ab+3bc)$

21. $7(3x^2-11x-6)-3(x^2+5x+4)-9(2x^2-11x-6)$

$a=1,\ b=2,\ c=4,\ x=3,\ y=0$ এবং $z=5$ হইলে নিম্নলিখিত রাশিমালার মান নির্ণয় কর :—

22. $(5a^2x^2+8b^2y^2+3c^2z^2)+(5c^2z^2-6b^2y^2-9a^2x^2)+(4a^2x^2-b^2y^2-7c^2z^2)$

23. $(2a^3+5b^3-4c^3+6abc)+(4a^3-7b^3+11c^3-12abc)+(3b^3-6c^3-5a^3+3a$

24. $(5x^2y^2-6a^2b^2+6abxy)+(8a^2b^2-3x^2y^2-6abxy)$
$+(7x^2y^2-2a^2b^2-5abxy)+(a^2b^2-8x^2y^2+6abxy)$

25. $(5{\cdot}2a^2xz+3{\cdot}7b^2yz+8{\cdot}5c^2zx)+(3{\cdot}5c^2zx-4{\cdot}4b^2yz-3{\cdot}8a^2xz)$
$+(6{\cdot}3b^2yz-9{\cdot}1c^2zx-4{\cdot}2a^2xz)+(3{\cdot}8a^2xz-4{\cdot}6b^2yz-2{\cdot}9c^2zx)$

26. $A=4x-y-2z$, $B=4y-2x-z$, $C=4z-x-2y$ হইলে প্রমাণ কর যে $A+B+C=x+y+z$

27. $P=3x^4+2x^3-5x^2+9x-2$, $Q=x^4-5x^3+7x^2-10x+3$ এবং $R=4x^4-3x^3+2x^2-x+1$ হইলে, দেখাও যে $P+Q=R$

28. $F(x)\equiv 3x^3-2x^2+4x+1$, $F'(x)\equiv -4x^3+7x^2-6x+8$ এবং $F''(x)\equiv x^3-5x^2+2x-9$ হইলে প্রমাণ কর যে

$$F(x)+F'(x)+F''(x)=0$$

29. $R=ax+by+cz$, $S=ax-by+cz$ এবং $T=-ax+by-cz$ হইলে $R-2S-T$ এবং $2R-S+T$ এর মান নির্ণয় কর।

30. $X=2a^2+b^2+2c^2$, $Y=3bc+3ca-a^2-c^2$ এবং $Z=2ab-bc-ca$ হইলে, $X+Y+Z=$ কত ?
যদি $a=2$, $b=-4$ এবং $c=3$ হয় তবে $X+Y+Z$-এর সাংখ্যমান কত হইবে ?

সরল ও মিশ্ররাশির বিয়োগ

51. কোনও রাশি হইতে অপর একটি রাশি বাহির করিয়া লইবার প্রণালীকে বিয়োগ (Subtraction) বলে। যে রাশি হইতে বিয়োগ করা হয় তাহাকে বিয়োজন (Minuend) এবং যাহা বিয়োগ করা হয় তাহাকে বিয়োজ্য (Subtrahend) বলে। বিয়োগ প্রক্রিয়া সম্পন্ন করার পর প্রাপ্ত ফলকে বিয়োগফল বা অবশিষ্ট (Difference or Remainder) বলে।

সুতরাং $x-y=z$ হইলে x-কে বিয়োজন, y-কে বিয়োজ্য এবং z-কে বিয়োগফল বলা হয়।

কোনও একটি রাশি x হইতে অপর একটি রাশি y বিয়োগ করিয়া তৃতীয় একটি রাশি z পাওয়া গিয়াছে বলিলে ইহাই বুঝায় যে z এমন একটি রাশি যাহা y-এর সহিত যোগ করিলে যোগফল x-এর সমান হইবে। অর্থাৎ, যদি $y+z=x$ হয় তবে $x-y=z$ হইবে।

52. একপদ অসদৃশ ধনরাশির বিয়োগ

বিয়োজন হইতে বিয়োজ্যকে বিয়োগ চিহ্নের দ্বারা বিযুক্ত করিলে যে মিশ্ররাশিটি পাওয়া যায় তাহাই দুইটি অসদৃশ একপদ ধনরাশির বিয়োগফল।

উদাহরণ 1. x হইতে y বিয়োগ কর।

নির্ণেয় বিয়োগফল $=x-y$

উদাহরণ 2. $3a$ হইতে $5b$ বিয়োগ কর।

নির্ণেয় বিয়োগফল $=3a-5b$

53. বহুপদ অসদৃশ ধনরাশির বিয়োগ

যদি বিয়োজন ও বিয়োজ্যের পদগুলির প্রত্যেকটি ধনরাশি হয় তাহা হইলে বিয়োজনের পদগুলি হইতে বিয়োজ্যের সমস্ত পদকে বিয়োগচিহ্নের দ্বারা বিযুক্ত করিলে যে মিশ্র রাশিটি পাওয়া যাইবে তাহাই দুইটি অসদৃশ বহুপদ ধনরাশির বিয়োগফল।

উদাহরণ 3. $m+n$ হইতে $p+q$ বিয়োগ কর।

নির্ণেয় বিয়োগফল $=(m+n)-(p+q)=m+n-p-q$

উদাহরণ 4. $2a+3b$ হইতে $5x+7y$ বিয়োগ কর।

নির্ণেয় বিয়োগফল $=(2a+3b)-(5x+7y)$

$$=2a+3b-5x-7y.$$

54. একপদ সদৃশ ধনরাশির বিয়োগ

দুইটি একপদ সদৃশ ধনরাশি যোগ করিবার সময় যেমন উহাদের সাংখ্য সহগ দুইটির যোগফল বৈজিক প্রতীকের সহগরূপে যুক্ত করিলে নির্ণেয় যোগফল পাওয়া যায় তেমনই একটি একপদ ধনরাশি হইতে আর একটি সদৃশ একপদ ধনরাশি বিয়োগ করিবার সময় বিয়োজনের সহগ হইতে বিয়োজ্যের সহগ বিয়োগ করিয়া প্রাপ্ত বিয়োগফলকে বৈজিক প্রতীকের সহগরূপে যুক্ত করিলে নির্ণেয় বিয়োগফল পাওয়া যায়।

বীজগণিতীয় রাশি দুইটিতে আক্ষরিক বা মিশ্র সহগ থাকিলেও উপরিউক্ত নিয়মে যে কোনও দুইটি একপদ সদৃশ ধনরাশির বিয়োগফল নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 5. $7x$ হইতে $5x$ বিয়োগ কর।

$7x-5x=(7-5)x=2x$

উদাহরণ 6. $10ab$ হইতে ab বিয়োগ কর।

$10ab-3ab=(10-3)ab=7ab$

উদাহরণ 7. pr হইতে qr বিয়োগ কর।

এস্থলে p ও q, r এর আক্ষরিক সহগ।

$\therefore \quad pr-qr=(p-q)r$

উদাহরণ 8. $3ac$ হইতে $2bc$ বিয়োগ কর।

এস্থলে $3a$ ও $2b$, c-এর মিশ্র সহগ।

$\therefore \quad 3ac-2bc=(3a-2b)c$

55. বহুপদ ধনরাশির বিয়োগ

বিয়োজন ও বিয়োজ্য বহুপদবিশিষ্ট ধনরাশি হইলে উভয় রাশিস্থ সদৃশ ও অসদৃশ পদগুলির বিয়োগকার্য পূর্বোক্ত নিয়মে সম্পন্ন করিতে হয়। এইরূপ স্থলে বিয়োজনের নীচে বিয়োজ্যটি এমনভাবে লিখিতে হয় যে

সদৃশ পদগুলি যেন একই স্তম্ভে এবং অসদৃশ পদগুলি যেন পৃথক পৃথক স্তম্ভে স্থাপিত হয় এবং একটি কসি টানিয়া ঐ কসির নীচে বিয়োগফলটি লিখিতে হয়।

উদাহরণ 9. $12x+9y$ হইতে $7x+5y$ বিয়োগ কর।

$$\begin{array}{l} 12x+9y \\ 7x+5y \\ \hline (12-7)x+(9-5)y \\ =5x+4y \end{array}$$

উদাহরণ 10. $10a+7b+5c$ হইতে $2a+7b+3d$ বিয়োগ কর।

$$\begin{array}{l} 10a+7b+5c \\ 2a+7b \qquad +3d \\ \hline (10-2)a+(7-7)b+5c-3d \\ =8a+0+5c-3d \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বিয়োগফল $=8a+5c-3d$

দ্রষ্টব্য। শিক্ষার্থীদের বুঝিবার সুবিধার জন্য উপরের উদাহরণগুলিতে কসির ঠিক নীচে বিয়োগের প্রক্রিয়াটি লিখিয়া দেখান হইয়াছে। ঐ প্রক্রিয়াটি মনে মনে সম্পন্ন করিয়া একবারে বিয়োগফলটি লিখিবার অভ্যাস করাই বাঞ্ছনীয়।

56. বীজগণিতে বিয়োগের স্বরূপ

বিয়োগ যোগের বিপরীত প্রক্রিয়া সুতরাং কোনও রাশি হইতে একটি ধনরাশি বিয়োগ করা অথবা উহার সহিত সমান পরম মান বিশিষ্ট একটি ঋণরাশি যোগ করা একই কথা এবং কোনও রাশি হইতে একটি ঋণরাশি বিয়োগ করা অথবা উহার সহিত সমান পরম মান বিশিষ্ট একটি ধনরাশি যোগ করা একই কথা।

অর্থাৎ, x হইতে $+y$ বিয়োগ করা এবং x-এর সহিত $-y$ যোগ করা সমার্থক।

$$\therefore \quad x-(+y)=x+(-y)=x-y$$

আবার x হইতে $-y$ বিয়োগ করা এবং x-এর সহিত $+y$ যোগ করা সমার্থক।

$$\therefore \quad x-(-y)=x+(+y)=x+y$$

অনুরূপে, $5x$ হইতে $3x$ বিয়োগ করিতে হইলে $5x$-এর সহিত $-3x$ যোগ করিতে হইবে।

$$\therefore \quad 5x-(+3x)=5x+(-3x)=5x-3x=2x$$

সুতরাং দেখা যাইতেছে একটি রাশি হইতে অপর একটি রাশি বিয়োগ করিতে হইলে শেষোক্ত রাশিটির চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া পূর্বোক্ত রাশিটির সহিত যোগ করিলেই হয়।

ধন ও ঋণরাশি সমন্বিত একটি বীজগণিতীয় রাশিমালা হইতে অনুরূপ আর একটি বীজগণিতীয় রাশিমালা বিয়োগ করিবার সাধারণ নিয়ম।

বিয়োজন রাশিটির নীচে বিয়োজ্য রাশিটিকে এইরূপে স্থাপন করিতে হইবে যে, রাশি দুইটির সদৃশ পদগুলি একই স্তম্ভে এবং অসদৃশ পদগুলি ভিন্ন ভিন্ন স্তম্ভে থাকে। অতঃপর বিয়োজ্য রাশির তলায় একটি কসি টানিয়া বিয়োজ্য রাশির প্রত্যেকটি পদের চিহ্ন মনে মনে পরিবর্তন করিয়া (অর্থাৎ '+' কে '−' এবং '−' কে '+') প্রত্যেকটি স্তম্ভের যোগফল স্ব-স্ব চিহ্ন সহ কসির নীচে লিখিলেই রাশি দুইটির বিয়োগফল পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ 11. $5x-13y+7z$ হইতে $2x+6y-9z$ বিয়োগ কর।

$$\begin{array}{l} 5x-13y+7z \\ \underline{2x+\ \ 6y-9z} \\ 3x-19y+16z \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বিয়োগফল $=3x-19y+16z$

উদাহরণ 12. $13xy-7yz$ হইতে $8xy+2zx-3zx$ বিয়োগ কর।

$$\begin{array}{r} 13xy-7yz \\ 8xy+2yz-3zx \\ \hline 5xy-9yz+3zx \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বিয়োগফল $=5xy-9yz+3zx$

বিয়োজনে বামদিক হইতে তৃতীয় স্তম্ভে কোনও পদ না থাকায় $-3zx$-কেই চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া নিম্নে লেখা হইয়াছে।

উদাহরণ 13. $3+by+b^2y^2-b^3y^3+b^4y^4$ হইতে $1+by+b^3y^3-b^4y^4$ বিয়োগ কর।

$$\begin{array}{l} 3+by+b^2y^2-b^3y^3+b^4y^4 \\ 1+by \qquad\quad +b^3y^3-b^4y^4 \\ \hline 2 \qquad +b^2y^2-2b^3y^3+2b^4y^4 \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বিয়োগফল $=2+b^2y^2-2b^3y^3+2b^4y^4$

বামদিক হইতে তৃতীয় স্তম্ভে বিয়োজ্য রাশিতে কোনও পদ না থাকায় বিয়োজনের b^2y^2 পদটিকে অপরিবর্তিত অবস্থায় নীচে লেখা হইয়াছে; যেহেতু $b^2y^2-0=b^2y^2$.

উদাহরণ 14. $a-b$ হইতে $b-c$ বিয়োগ করিয়া সেই বিয়োগফলের সহিত আর কত যোগ করিলে যোগফল $a+b+c$ হইবে?

$a-b$ হইতে $b-c$ বিয়োগ করিলে বিয়োগফল হইবে

$(a-b)-(b-c)=a-b-b+c=a-2b+c$

আবার $a+b+c$ হইতে $a-2b+c$ বিয়োগ করিলে বিয়োগফল হইবে $(a+b+c)-(a-2b+c)=a+b+c-a+2b-c=3b$

$\therefore$ নির্ণেয় রাশিটি $=3b$.

প্রশ্নমালা 9

প্রথম রাশিটি হইতে দ্বিতীয় রাশিটি বিয়োগ কর :—

1. $8x,\ 5x$
2. $7ab,\ 2ab.$
3. $12pq,\ -18pq$
4. $-27xyz,\ -13xyz$
5. $28axby,\ -12abxy$
6. $3x+8,\ 2x+4$
7. $10p-8q,\ 5p-2q$
8. $-12a-3b,\ -8a-17b$
9. $a+b-c,\ \ -8a-2b+c$
10. $-5x^2+12x,\ \ -5x^3-7x+5$
11. $-6p-10q-15r,\ -7p-11q-16r$
12. $-3xy+4yz-5zx,\ \ -5xy-4yz-3zx$
13. $4a^2b^2-3b^2c^2+2c^2a^2,\ \ -5a^2b^2+6b^2c^2-7c^2a^2$
14. $-a^2x^2+4b^2y^2+7c^2z^2,\ \ a^2x^2-4b^2y^2-7c^2z^2$
15. $30a^4-10^3b+12a^2b^2-8b^4,\ -20a^3b-8a^2b^2+5b^4$
16. $\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{4}b^4,\ \ \frac{1}{8}a^4-\frac{1}{2}a^2b^2+\frac{1}{4}b^4$
17. $\frac{3}{5}x^2yz-\frac{7}{3}xy^2z-\frac{13}{9}xyz^2,\ -\frac{7}{5}x^2yz+\frac{5}{3}xy^2z-\frac{5}{9}xyz^2$
18. $\frac{20}{7}a^3+\frac{4}{7}a^2b-\frac{8}{3}ab^2-\frac{13}{9}b^3,\ \frac{13}{7}a^3-\frac{5}{7}a^2b-\frac{3}{8}ab^2+\frac{9}{13}b^3$
19. $a^3+b^3+c^3-3abc$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $6abc$ হইবে ?
20. $10p^2+5q^2+6x^2-pqr$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $3p+4q^2-2r^2+pqr$ হইবে ?
21. $P=2l^3+3lmn-m^3-2n^3$ এবং $Q=l^3+6lmn-2m^3-3n^3$ হইলে দেখাও যে $P-Q=l^3+m^3+n^3-3lmn.$
22. $7{\cdot}8a^4bc\times2{\cdot}3ab^4c-3{\cdot}7abc^4$ এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $1{\cdot}8a^4bc-13{\cdot}7ab^4c-1{\cdot}3abc^4$ হইবে ?

সরল কর :—

23. $(a^3+b^3+c^3)-(b^3-c^3-a^3)-(c^3+a^3-b^3)$
24. $(x^2y^2-y^2z^2+z^2x^2)-(x^2y^2-z^2x^2)+(y^2z^2-z^2x^2)$
25. $(a^4x^4-2a^2b^2x^2y^2+b^4y^4)-(a^4x^4-a^2b^2x^2y^2)+(a^2b^2x^2y^2-b^4y^4)$

গুণন

57. একটি সংখ্যা একাধিকবার লইয়া যোগ করিলে কত হয় তাহা নির্ণয় করিবার প্রক্রিয়াকে গুণন বলে ; সুতরাং গুণন যোগেরই সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়া।

গুণন প্রক্রিয়ায় যে রাশিকে গুণ করা হয় তাহাকে গুণ্য (Multiplicand), যে রাশি দ্বারা গুণ করা হয় তাহাকে গুণক (Multiplier) এবং গুণন প্রক্রিয়া দ্বারা প্রাপ্ত ফলকে গুণফল (Product) বলে।

'x-কে 3 দ্বারা গুণ কর' বলিলে বুঝিতে হইবে x-কে 3 বার লইয়া যোগ করিতে হইবে। সুতরাং $x\times 3=x+x+x=3x$. এক্ষেত্রে x গুণ্য, 3 গুণক এবং $3x$ গুণফল।

গুণকটি অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে গুণনের উপরি উক্ত সংজ্ঞাই যথেষ্ট অর্থবোধক হয় বটে কিন্তু গুণকটি ভগ্নাংশ বা ঋণরাশি হইলে ঐ সংজ্ঞা অর্থহীন হইয়া পড়ে। পাটীগণিতে ঋণসংখ্যা না থাকিলেও ভগ্নাংশ আছে। বীজগণিতে আবার ভগ্নাংশ ও ঋণসংখ্যা দুইই আছে। এই কারণে গুণন ক্রিয়ার অর্থ সম্প্রসারিত করিয়া নূতন সংজ্ঞা দিবার প্রয়োজন হইয়াছে।

58. গুণনের নূতন সংজ্ঞা :

যে প্রক্রিয়া দ্বারা 1 (Unity)-কে কোনও নির্দিষ্ট সংখ্যায় পরিণত করা যায় সেই প্রক্রিয়া অন্য একটি নির্দিষ্ট সংখ্যার উপর প্রয়োগ করিলে শেষোক্ত সংখ্যাটিকে প্রথমোক্ত সংখ্যা দ্বারা গুণ করা হইল বলা হয়, $4=1+1+1+1$ অর্থাৎ, 1-কে 4 বার লইয়া যোগ করিলে 4 হয়। সুতরাং 5-কে 4 দ্বারা গুণ করিতে হইলে 5-কে 4 বার লইয়া যোগ করিতে হইবে।

$$\therefore\ 5\times 4=5+5+5+5=20$$

$$-5\times 4=(-5)+(-5)+(-5)+(-5)$$

$$=-5-5-5-5=-20$$

অনুরূপে, $x \times 4 = x + x + x + x = 4x$

$$-x \times 4 = (-x) + (-x) + (-x) + (-x)$$
$$= -x - x - x - x = -4x$$

আবার দেখ, $\frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$; অর্থাৎ 1-এর পঞ্চমাংশ 4 বার লইয়া যোগ করিলে $\frac{4}{5}$ হয়, সুতরাং x-কে $\frac{4}{5}$ দ্বারা গুণ করিতে হইলে x-এর পঞ্চমাংশ চারিবার লইয়া যোগ করিতে হইবে।

$$\therefore \quad x \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}x = \frac{4}{5}x$$
$$-x \times \frac{4}{5} = (-\frac{1}{5}x) + (-\frac{1}{5}x) + (-\frac{1}{5}x) + (-\frac{1}{5}x)$$
$$= -\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}x = -\frac{4}{5}x$$

এখন মনে করা যাউক 5-কে -4 দ্বারা গুণ করিতে হইবে। এক্ষেত্রে দেখিতে হইবে কি প্রক্রিয়া দ্বারা 1-কে -4-এ পরিণত করা যায়।

1-কে 4 বার লইয়া যোগ করিলে হয় 4 এবং এই 4-এর মানকে ঋণাত্মক করিলে হয় -4 অর্থাৎ, $-4 = -(1+1+1+1)$
$$= -1-1-1-1$$

$$\therefore \quad 5 \times (-4) = -(5+5+5+5)$$
$$= -5-5-5-5 = -20$$

ঐ একই পদ্ধতিতে একটি ঋণাত্মক সংখ্যাকে অপর একটি ঋণাত্মক সংখ্যা দ্বারা গুণ করা যায়।

যেমন, $(-5) \times (-4) = -\{(-5) + (-5) + (-5) + (-5)\}$
$$= -(-5-5-5-5)$$
$$= -(-20) = 20$$

উপরের উদাহরণগুলি হইতে স্পষ্টই প্রতীয়মান হইবে যে দুইটি রাশির গুণফল উহাদের পরমমানের গুণফলের সমান হইবে এবং রাশি দুইটি সদৃশ চিহ্ন যুক্ত হইলে গুণফল ধনরাশি এবং রাশি দুইটি অসদৃশ চিহ্ন যুক্ত হইলে গুণফল ঋণরাশি হইবে। এই কথাগুলিকে গুণনের সূত্রাকারে নিম্নে লেখা হইল।

59. গুণনের সূত্র :

x ও y যে-কোনও দুইটি সংখ্যা হইলে,

$$(+x)\times(+y)=+xy$$
$$(-x)\times(+y)=-xy$$
$$(+x)\times(-y)=-xy$$
$$(-x)\times(-y)=+xy$$

এই সূত্রানুযায়ী, $x\times y\times(-z)=xy(-z)=-xyz$

$$x\times(-y)\times(-z)=(-xy)(-z)=+xyz$$
$$(-x)\times(-y)\times(-z)=xy(-z)=-xyz$$
$$(-w)\times(-x)\times(-y)\times(-z)$$
$$=wx\times(-y)\times(-z)=-wxy(-z)=wxyz$$

সুতরাং দেখা যাইতেছে কতকগুলি রাশি ধারাবাহিকভাবে গুণ করিবার সময় যদি উহাদের মধ্যে ঋণরাশির সংখ্যা যুগ্ম হয় তবে ঐ গুণফল ধনাত্মক হইবে আর যদি উহাদের মধ্যে ঋণরাশির সংখ্যা অযুগ্ম হয় তবে ঐ গুণফল ঋণাত্মক হইবে। ঐ একই কারণে কোনও ঋণরাশির ঘাতের সূচক যুগ্ম হইলে রাশিটি ধনরাশি এবং অযুগ্ম হইলে রাশিটি ঋণরাশি হইয়া থাকে।

$$(-x)^2=(-x)(-x)=+x^2$$
$$(-x)^4=(-x)(-x)(-x)(-x)=x^2(-x)(-x)$$
$$=-x^3(-x)=x^4$$

কিন্তু, $(-x)^3=(-x)(-x)(-x)=x^2(-x)=-x^3$

$$(-x)^5=(-x)(-x)(-x)(-x)(-x)$$
$$=(x^2)(-x)(-x)(-x)=-x^3(-x)(-x)$$
$$=x^4(-x)=-x^5$$

দ্রষ্টব্য : যেহেতু $(+x)\times(+x)=x^2$ আবার $(-x)\times(-x)=x^2$. সুতরাং x^2-এর বর্গমূল '$+x$' এবং '$-x$' দুইই হইতে পারে। মনে

রাখিবে প্রত্যেকটি বৈজিক রাশিরই দুইটি করিয়া বর্গমূল থাকে। এই মূল দুইটির পরমমান সমান কিন্তু উহারা বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট।

$$(+4)^2=(+4)\times(+4)=16 \quad \therefore \quad \sqrt{16}=+4$$

আবার, $(-4)^2=(-4)\times(-4)=16 \quad \therefore \quad \sqrt{16}=-4$

লক্ষ্য কর যে, 16-এর যে দুইটি বর্গমূল পাওয়া গেল ; এই মূল দুইটির পরম মান সমান কিন্তু উহাদের একটির মান ধনাত্মক, অপরটির মান ঋণাত্মক।

এই কথা কয়টি বুঝাইবার জন্য $\sqrt{16}=+4$ বা, -4 লেখা হয় অথবা আরও সংক্ষেপে $\sqrt{16}=\pm 4$ লেখা হয়।

60. গুণন সম্পর্কিত একটি প্রয়োজনীয় নিয়ম।

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে গুণনের বিনিময় নিয়ম, সংযোগ নিয়ম এবং বিচ্ছেদ নিয়ম সম্পর্কে আলোচনা করা হইয়াছে। বর্তমান অধ্যায়ে গুণনের সূচক নিয়ম সম্পর্কে আলোচনা করা হইল।

গুণনের সূচক নিয়ম :

m ও n দুইটি অখণ্ড ধনরাশি এবং a শূন্য ভিন্ন যে কোনও রাশি হইলে, $a^m\times a^n=a^{m+n}$ হয়। ইহাকে প্রাথমিক সূচক নিয়ম বলে।

প্রমাণ : $a^5=a\times a\times a\times a\times a$; $a^3=a\times a\times a$

$$\therefore \quad a^5\times a^3=a\times a\times a\times a\times a\times a\times a\times a$$
$$=a^8=a^{5+3}.$$

সুতরাং সাধারণ ভাবে বলা যায়, a র মান শূন্য না হইলে এবং m ও n দুইটি অখণ্ড ধন সংখ্যা হইলে,

$a^m=a\times a\times a\times\cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত।

$a^n=a\times a\times a\times\cdots n$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত।

59. গুণনের সূত্র :

x ও y যে-কোনও ছুইটি সংখ্যা হইলে,

$$(+x)\times(+y)=+xy$$
$$(-x)\times(+y)=-xy$$
$$(+x)\times(-y)=-xy$$
$$(-x)\times(-y)=+xy$$

এই সূত্রানুযায়ী, $x\times y\times(-z)=xy(-z)=-xyz$

$$x\times(-y)\times(-z)=(-xy)(-z)=+xyz$$
$$(-x)\times(-y)\times(-z)=xy(-z)=-xyz$$
$$(-w)\times(-x)\times(-y)\times(-z)$$
$$=wx\times(-y)\times(-z)=-wxy(-z)=wxyz$$

সুতরাং দেখা যাইতেছে কতকগুলি রাশি ধারাবাহিকভাবে গুণ করিবার সময় যদি উহাদের মধ্যে ঋণরাশির সংখ্যা যুগ্ম হয় তবে ঐ গুণফল ধনাত্মক হইবে আর যদি উহাদের মধ্যে ঋণরাশির সংখ্যা অযুগ্ম হয় তবে ঐ গুণফল ঋণাত্মক হইবে। ঐ একই কারণে কোনও ঋণরাশির ঘাতের সূচক যুগ্ম হইলে রাশিটি ধনরাশি এবং অযুগ্ম হইলে রাশিটি ঋণরাশি হইয়া থাকে।

$$(-x)^2=(-x)(-x)=+x^2$$
$$(-x)^4=(-x)(-x)(-x)(-x)=x^2(-x)(-x)$$
$$=-x^3(-x)=x^4$$

কিন্তু, $(-x)^3=(-x)(-x)(-x)=x^2(-x)=-x^3$

$$(-x)^5=(-x)(-x)(-x)(-x)(-x)$$
$$=(x^2)(-x)(-x)(-x)=-x^3(-x)(-x)$$
$$=x^4(-x)=-x^5$$

দ্রষ্টব্য : যেহেতু $(+x)\times(+x)=x^2$ আবার $(-x)\times(-x)=x^2$. সুতরাং x^2-এর বর্গমূল '$+x$' এবং '$-x$' ছুইই হইতে পারে। মনে

রাখিবে প্রত্যেকটি বৈজিক রাশিরই দুইটি করিয়া বর্গমূল থাকে। এই মূল দুইটির পরমমান সমান কিন্তু উহারা বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট।

$$(+4)^2=(+4)\times(+4)=16 \quad \therefore \quad \sqrt{16}=+4$$

আবার, $(-4)^2=(-4)\times(-4)=16 \quad \therefore \quad \sqrt{16}=-4$

লক্ষ্য কর যে, 16-এর যে দুইটি বর্গমূল পাওয়া গেল ; এই মূল দুইটির পরম মান সমান কিন্তু উহাদের একটির মান ধনাত্মক, অপরটির মান ঋণাত্মক।

এই কথা কয়টি বুঝাইবার জন্য $\sqrt{16}=+4$ বা, -4 লেখা হয় অথবা আরও সংক্ষেপে $\sqrt{16}=\pm 4$ লেখা হয়।

60. গুণন সম্পর্কিত একটি প্রয়োজনীয় নিয়ম।

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে গুণনের বিনিময় নিয়ম, সংযোগ নিয়ম এবং বিচ্ছেদ নিয়ম সম্পর্কে আলোচনা করা হইয়াছে। বর্তমান অধ্যায়ে গুণনের সূচক নিয়ম সম্পর্কে আলোচনা করা হইল।

গুণনের সূচক নিয়ম :

m ও n দুইটি অখণ্ড ধনরাশি এবং a শূন্য ভিন্ন যে কোনও রাশি হইলে, $a^m \times a^n = a^{m+n}$ হয়। ইহাকে প্রাথমিক সূচক নিয়ম বলে।

প্রমাণ : $a^5=a\times a\times a\times a\times a$; $a^3=a\times a\times a$

$$\therefore \quad a^5\times a^3=a\times a\times a\times a\times a\times a\times a\times a$$
$$=a^8=a^{5+3}.$$

সুতরাং সাধারণ ভাবে বলা যায়, a র মান শূন্য না হইলে এবং m ও n দুইটি অখণ্ড ধন সংখ্যা হইলে,

$a^m=a\times a\times a\times\cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত।

$a^n=a\times a\times a\times\cdots n$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত।

$\therefore \quad a^m \times a^n = (a \times a \times a \cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্য্যন্ত)

$\times (a \times a \times a \cdots n$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)।

$= a \times a \times a \times a \cdots (m+n)$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত।

$= a^{m+n}$

দেখা যাইতেছে গুণ্য এবং গুণকে যে-কোনও একটি সংখ্যার বা অক্ষরের যে সূচকসমূহ রহিয়াছে তাহাদের সমষ্টি লইলেই গুণফলে ঐ নির্দিষ্ট সংখ্যা বা অক্ষরের সূচক কত হইবে তাহা জানা যায়।

$3^4 \times 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$ (কদাচ $3^{4 \times 5} = 3^{20}$ নহে।)

$x^5 \times x^7 = x^{5+7} = x^{12}$ (কদাচ $x^{5 \times 7} = x^{35}$ নহে।)

গুণ্য এবং গুণকে বিভিন্ন অক্ষরের ঘাত বর্তমান থাকিলেও গুণফলের অন্তর্গত প্রত্যেক অক্ষরের সূচকই উক্ত নিয়মে নির্ণয় করা যায়। যেমন, $a^4b^3c^2 \times a^3b^2c^4 = a^{4+3} \times b^{3+2} \times c^{2+4} = a^7b^5c^6$

গুণফলের সূচক নির্ণয় কালে গুণ্যের এক অক্ষরের সূচকের সহিত গুণকের অপর কোনও অক্ষরের সূচক যেন যোগ না করা হয় সেদিকে বিশেষ লক্ষ্য রাখা প্রয়োজন।

$x^a \times y^b$-এর মান $x^a y^b$ [x^{a+b} বা y^{a+b} বা $(xy)^{a+b}$ নহে।]

x ও y দুইটি বিভিন্ন অক্ষর ; সুতরাং একটির সূচকের সহিত আর একটির সূচক কখনই যোগ করা যাইবে না। x^a ও y^b-এর গুণফলকে $x^a y^b$ ভিন্ন অন্য কোনও রূপেই প্রকাশ করা যায় না।

61. সূচক নিয়ম হইতে সিদ্ধান্ত :

প্রাথমিক সূচক নিয়ম হইতে নিম্নলিখিত ফলগুলি পাওয়া যায়।

I. m, n, p প্রভৃতি সূচকগুলি অখণ্ড ধনরাশি এবং a শূন্য ভিন্ন অপর কোনও রাশি হইলে, $a^m \times a^n \times a^p \times \cdots = a^{m+n+p+\cdots}$ হয়।

প্রমাণ : $a^m \times a^n \times a^p \times \cdots$

$= (a \times a \times a \times \cdots m$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$\times (a \times a \times a \times \cdots n$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$\times (a \times a \times a \times \cdots p$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত) $\times \cdots$

$= a \times a \times a \times \cdots (m+n+p+\cdots)$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= a^{m+n+p+\cdots}$

II. a ও b উভয়েই শূন্য ভিন্ন অপর কোনও রাশি বুঝাইলে এবং n একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে, $(ab)^n = a^n \times b^n$. হয়।

প্রমাণ : $(ab)^n = ab \times ab \times ab \times \cdots n$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= (a \times a \times a \times \cdots n$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$\times (b \times b \times b \times \cdots n$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$a^n \times b^n$.

III. m ও n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে এবং a শূন্য ভিন্ন অপর কোনও রাশি হইলে, $(a^m)^n = a^{mn}$ হয়।

প্রমাণ : $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \cdots n$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= a^{m+m+m \cdots n}$ পদ পর্যন্ত

$= a^{mn}$

$(a^m)^n$ ও $(a^m \times a^n)$ রাশি দুইটির মান সমান নহে।

$(a^m)^n = a^{mn}$ এবং $a^m \times a^n = a^{m+n}$

লক্ষ্য করিয়া দেখ—$(2^3)^2 = 64 = 2^{3 \times 2}$

এবং $(2^3 \times 2^2) = 32 = 2^{3+2}$

62. একপদ রাশিসমূহের গুণন :

উদাহরণ 1. $5a$-কে $-4a$ দ্বারা গুণ কর।

$(5a) \times (-4a) = (5)(-4)(a \times a)$

$= -20a^{1+1} = -20a^2$

উদাহরণ 2. $-7x^2y$-কে $-8xy^2$ দ্বারা গুণ কর।

$$(-7x^2y)(-8xy^2)=(-7)(-8)(x^2y\times xy^2)$$
$$=56(x^2\times x\times y\times y^2)$$
$$=56x^{2+1}\times y^{1+2}$$
$$=56x^3y^3$$

উদাহরণ 3. $18a^3b^5x^7y^4$কে $-12a^7b^4x^5y^6$ দ্বারা গুণ কর।

$$(18a^3b^5x^7y^4)\times(-12a^7b^4x^5y^6)$$
$$=(18)(-12)(a^3\times a^7\times b^5\times b^4\times x^7\times x^5\times y^4\times y^6)$$
$$=-216a^{3+7}\times b^{5+4}\times x^{7+5}\times y^{4+6}$$
$$=-216\,a^{10}b^9x^{12}y^{10}$$

উদাহরণ 4. $\{(x.x^2)^4\}^3$, $(-x)^5\times(x^2\times x^3)$, $\{(-x)^2\}^3\times(-x^3)^3$ এবং $\{(3x)^2\}^2$-এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=\{x.x^2)^4\}^3=\{(x^3)^4\}^3=(x^{12})^3=x^{36}$

দ্বিতীয় রাশি $=(-x)^5\times(x^2\times x^3)=(-x^5)(x^5)=-x^{10}$

তৃতীয় রাশি $=\{(-x)^2\}^3\times(-x^3)^3=(x^2)^3\times(-x^3)^3$

$$=(x^6)(-x^9)=-x^{15}$$

চতুর্থ রাশি $=\{(3x)^2\}^2=(9x^2)^2=81x^4$

$\therefore$ প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির গুণফল $=(x^{36})(-x^{10})=-x^{46}$

প্রথম দুইটি রাশির গুণফলকে তৃতীয় রাশির দ্বারা গুণ করিলে গুণফল হয় $(-x^{46})(-x^{15})=x^{61}$

প্রথম তিনটি রাশির গুণফলকে চতুর্থ রাশিটি দ্বারা গুণ করিলে গুণফল হয় $(x^{61})(81x^4)=81x^{65}$

প্রশ্নমালা 10

প্রথম রাশিটিকে দ্বিতীয় রাশির দ্বারা গুণ কর :—

1. $4xy,\ 3y$; $7xy,\ -4x$; $-3ab,\ -6ab$

2. $-5ab,\ 3cd$; $4a^2b^2, 6a^3b$; $-5mn, 3m^2n^2$

3. $6m^4n, -4m^2n^6$; $-2x^2y, -3xy^2$; $-14x^7y, -7y^6z^7$

4. $-48m^2n^3p^4,\ -6m^4n^2p^2$; $8a^2b^3x^5y^4,\ -10a^3y^4x^2b^4$

5. $-4xy, (xy)^2$; $4xy, (-xy)^2$; $-4xy, (-xy)^2$

6. $(a^2)^3, (a^3)^2$; $(x^3)^5,\ (x^4)^2$; $(-p)^5, (-q)^6$

7. $(-2ab)^2,\ -3ab$; $(-2ab)^3,\ -3ab$; $-3a^xb^y,\ -4a^yb^x$

ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর :—

8. $-ab,\ -bc,\ -ca$;

9. $-3x,\ -4x^2,\ -5x^3$:

10. $2ax,\ -3a^2x,\ 4ax^2$;

11. $-2a^2bc,\ 3ab^2c,\ -4abc^2$

12. $-a^2x^2y^2, -2b^2y^2z^2, 3c^2z^2x^2$

13. $-p^2q^2r^2,\ -10pq^3, -3qr,\ -2p^3r^3$;

14. $(x^3)^4,\ \{(-x)^2\}^6,\ (a\times a^3)^2,\ (-a^2)^3$

15. $\{(a.a^4)^3\}^4,\ (-a)^5\times(a\times a^3),\ \{(-a)^4\}^3\times(-a^3)^3,\ \{(5a)^2\}^2$

63. বহুপদরাশিকে একপদরাশি দ্বারা গুণ :

গুণনের বিচ্ছেদ নিয়মের উল্লেখ পূর্বেও করা হইয়াছে। এখানে কোনও বহুপদরাশিকে একপদ রাশি দ্বারা গুণ করিয়া গুণফল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে এই বিচ্ছেদ নিয়মের ব্যবহার বিশদভাবে আলোচিত হইল।

একটি মিশ্র রাশিমালাকে কোনও একপদ রাশি দ্বারা গুণ করিলে যত হয় ঐ রাশিমালার প্রত্যেকটি পদকে একপদ রাশিটি দ্বারা গুণ করিয়া গুণ-ফলগুলির বীজগণিতীয় **সমষ্টি** লইলেও ততই হয়। ইহাকেই **গুণনের বিচ্ছেদ নিয়ম** বলে।

মনে কর, a ও b যে কোনও দুইটি রাশি এবং x অপর একটি অখণ্ড রাশি। গুণনের বিচ্ছেদ নিয়ম অনুযায়ী $(a+b)x=ax+bx$ সিদ্ধান্তটির প্রমাণ নিম্নে দেওয়া হইল।

$$(a+b)x=(a+b)\times x=(a+b)+(a+b)+(a+b) + \cdots x \text{ সংখ্যক পদ পর্যন্ত}$$
$$=(a+a+a+\cdots x \text{ সংখ্যক পদ পর্যন্ত})+(b+b+b+\cdots x \text{ সংখ্যক পদ পর্যন্ত})$$
$$=ax+bx$$

এক্ষেত্রে x-কে অখণ্ড ধনসংখ্যা ধরা হইয়াছে বটে কিন্তু ইহা অপর যে কোনও সংখ্যা হইলেও গুণনের বিচ্ছেদ নিয়মের সিদ্ধান্তটি সত্য।

অনুসিদ্ধান্ত : 1. $(a-b)x=ax-bx$

2. $(a+b+c)x=\{(a+b)+c\}x$
$$=(a+b)x+cx=ax+bx+cx$$

3. $(a-b+c-d+e-f+\cdots)x=ax-bx+cx-dx+ex-fx+\cdots$

এই অনুসিদ্ধান্তগুলি হইতে আমরা একটি মিশ্ররাশিমালাকে একটি সরল রাশি দ্বারা গুণ করিবার নিয়মটি পাই।

64. মিশ্র রাশিমালাকে সরল রাশি দ্বারা গুণনের নিয়ম :

একটি মিশ্র রাশিমালাকে কোনও সরল রাশি দ্বারা গুণ করিতে হইলে মিশ্র রাশিমালার প্রত্যেকটি পদকে সরল রাশিটির দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলগুলিকে যোগ করিলেই নির্ণেয় গুণফলটি পাওয়া যায়।

উদাহরণ 1. $5x-4y$ কে $3x^2$ দ্বারা গুণ কর।

$$(5x-4y)\times 3x^2=\{5x+(-4y)\}\times 3x^2$$
$$=5x\times 3x^2+(-4y)\times 3x^2$$
$$=15x^3-12x^2y.$$

উদাহরণ 2. $4x^2y-5xy^2-6xy$-কে $-4xy$ দ্বারা গুণ কর।

$$(4x^2y-5xy^2-6xy)(-4xy)$$
$$=\{4x^2y+(-5xy^2)+(-6xy)\}(-4xy)$$
$$=(4x^2y)(-4xy)+(-5xy^2)(-4xy)+(-6xy)(-4xy)$$
$$=-16x^3y^2+20x^2y^3+24x^2y^2.$$

মন্তব্য। উপরের উদাহরণ দুইটিতে গুণনের যে যে পদ্ধতি প্রদর্শন করা হইয়াছে, প্রথম শিক্ষার্থিগণের পক্ষে তাহাই অনুসরণযোগ্য। গুণন কার্যে কিছু পরিমাণে অভ্যস্ত হইবার পরে নিম্নলিখিত উদাহরণ অনুযায়ী একবারে গুণফল লিখিবার চেষ্টা করাই বাঞ্ছনীয়।

উদাহরণ 3. $5x^3y^2-2x^2y^3+7xy$-কে $4x^2y^2$-দ্বারা গুণ কর।

গুণ্য $=5x^3y^2-2x^2y^3+7xy$

গুণক $=4x^2y^2$

নির্ণেয় গুণফল

$=20x^5y^4-8x^4y^5+28x^3y^3$

ব্যাখ্যা। গুণ্যের প্রথম রাশিটির নীচে গুণকটিকে বসাইয়া উহাদের নীচে একটি অনুভূমিক সরলরেখা টানা হইয়াছে। পরে গুণক রাশিটির দ্বারা গুণ্যরাশির প্রত্যেকটি পদ মনে মনে গুণ করিয়া স্ব-স্ব চিহ্ন সহ গুণফলগুলি একবারে ঐ সরলরেখার নীচে বসান হইয়াছে।

উদাহরণ 4. $15a^4b^3c-13a^3b^4c^2-9a^2b^5c^3+7ab^6c^4$-কে $-7a^3bc^2$ দ্বারা গুণ কর।

গুণ্য $=15a^4b^3c-13a^3b^4c^2-9a^2b^5c^3+7ab^6c^4$

গুণক $=-7a^3bc^2$

নির্ণেয় গুণফল $=-105a^7b^4c^3+91a^6b^5c^4+63a^5b^6c^5-49a^4b^7c^6$

প্রশ্নমালা 11

প্রথম রাশিটিকে দ্বিতীয় রাশিদ্বারা গুণ কর।

1. $xy+yz,\ xy$;　　**2.** $xy-yz,\ xyz$;

3. $4pq-5qr,\ -8pqr$;　　**4.** $a^4b^3-a^3b^4,\ a^2b^2$;

5. $4a-5b-7c,\ 3ab$; 6. $5a-6b+3c,\ -4bc$;

7. $2ab+2bc+2ca,\ 3abc$; 8. $-3x-4xy+y,\ -4x^2y^2$;

9. $2a^2-5ab-7b^2,\ -3a^2b^2$

10. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3,\quad -3x^2y^2$;

11. $8x^2-9xy^3-15x^3y^4+10xy^9,\ 8x^5y^3$;

12. $-m^6+3m^4n^2-3m^2n^4+n^6,\quad -3m^2n^2$;

13. $5x^2-\frac{1}{4}y^2,\ -\frac{4}{5}x^2y^2$; 14. $\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}b-\frac{1}{5}c,\ 60abc$;

15. $\frac{3}{10}a^2-\frac{9}{10}ax-\frac{3}{5}x^2,\ -\frac{5}{3}a^2x^2$;

সরল কর :—

16. $5a^2(3ab-2)-15ab(a^2-2)-10a(3b-a)$

17. $6x^3(x-5)-3x^2(2x^2-10x-1)-x(3x-2)$

18. $3a^4(2b^4-5c^4)-2b^4(4c^4+3a^4)+5c^4(3a^4+2b^4)$

19. $2x^2(x^2-2y^2)+y^2(4x^2-3y^2)+2(2y^4-x^4)$

20. $a=x-7y+9z,\ b=7x+y+4z$ এবং $c=9x+4y-z$ হইলে প্রমাণ কর যে $ax+by-cz=x^2+y^2+z^2$.

65. মিশ্র রাশিমালাকে মিশ্র রাশিমালা দ্বারা গুণন :

প্রমাণ করা যায় যে, $(a+b)\times(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

প্রমাণ : মনে কর, $c+d=x$

$\therefore\quad (a+b)(c+d)=(a+b)x$

$=ax+bx$ (গুণনের বিচ্ছেদ নিয়ম অনুসারে)

$=a(c+d)+b(c+d)$ (x-এর মান বসাইয়া)

$=ac+ad+bc+bd$ (গুণনের বিচ্ছেদ নিয়ম অনুসারে)

এইরূপে প্রমাণ করা যায়,

$$(a+b)(c-d)=ac-ad+bc-bd$$

$$(a-b)(c+d)=ac+ad-bc-bd$$

$$(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$$

অতএব দেখা যাইতেছে দুইটি দ্বিপদ রাশির গুণফল নির্ণয় করিতে হইলে গুণ্য রাশির প্রত্যেকটি পদকে গুণক রাশির প্রত্যেকটি পদের দ্বারা গুণ করিয়া গুণফলগুলি যোগ করিলেই নির্ণেয় গুণফলটি পাওয়া যায়।

গুণ্য এবং গুণক উভয়েই বহুপদ রাশি হইলেও এই নিয়মে উহাদের গুণফল নির্ণয় করা যাইতে পারে। কারণ, যে কোনও বহুপদ রাশিকে দ্বিপদ রাশিতে পরিণত করা যায়। যেমন, $m+n+p+q=(m+n)+(p+q)$ এবং $a+b+c-d-e=(a+b+c)-(d+e)$

অনুসিদ্ধান্ত 1.

$$(a+b+c)(x+y)=ax+bx+cx+ay+by+cy$$

এই অনুসিদ্ধান্তটি হইতে আমরা দুইটি বহুপদ রাশির একটি অপরটির দ্বারা গুণ করিবার নিয়মটি পাই। নিয়মটি এইরূপ—

একটি মিশ্র রাশিমালাকে অপর একটি মিশ্র রাশিমালা দ্বারা গুণ করিতে হইলে গুণকের প্রত্যেক পদের দ্বারা গুণ্যের প্রত্যেকটি পদকে পৃথক পৃথক গুণ করিয়া প্রাপ্ত গুণফলগুলির সমষ্টি লইতে হয়। এই সমষ্টিই হয় নির্ণেয় গুণফল।

উদাহরণ 1. $2x+y$-কে $x+2y$-দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{aligned}&(2x+y)(x+2y)\\ &=(2x+y)x+(2x+y)2y\\ &=2x^2+xy+4xy+2y^2\\ &=2x^2+5xy+2y^2.\end{aligned}$$

উদাহরণ 2. x^a+y^b-কে x^a-y^b-দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{aligned}&(x^a+y^b)\times(x^a-y^b)\\ &=(x^a+y^b)\times x^a+(x^a+y^b)\times(-y^b)\\ &=x^{2a}+x^ay^b-x^ay^b-y^{2b}\\ &=x^{2a}-y^{2b}.\end{aligned}$$

66. কোনও অক্ষরের ঘাতের ক্রম অনুসারে সাজান রাশিমালা ঃ

যদি কোনও মিশ্র রাশিমালা একই অক্ষরের বিভিন্ন ঘাতযুক্ত পদের দ্বারা গঠিত হয় এবং যদি ঐ পদগুলিকে এইরূপভাবে সাজান হয় যে কোনও নির্দিষ্ট অক্ষরটির সর্বোচ্চ ঘাতবিশিষ্ট পদটি প্রথম, তন্নিম্ন ঘাতবিশিষ্ট পদটি প্রথম পদের ডানদিকে, তন্নিম্ন ঘাতবিশিষ্ট পদটি দ্বিতীয় পদের ডানদিকে ইত্যাদি ক্রমে লিখিয়া সর্বনিম্ন ঘাতবিশিষ্ট পদটি বা ঐ অক্ষর বর্জিত ধ্রুবক পদটি সবশেষে লেখা হয় তবে ঐ রাশিমালাকে নির্দিষ্ট অক্ষরটির ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজান হইল বলা হয়। আর যদি রাশিমালার পদগুলিকে ঠিক ইহার বিপরীত ভাবে সাজান যায় অর্থাৎ, প্রথমে ধ্রুবক পদটি, উহার ডানদিকে সর্বনিম্ন ঘাতবিশিষ্ট পদটি ইত্যাদি ক্রমে লিখিয়া সবশেষে সর্বোচ্চ ঘাতবিশিষ্ট পদটি লেখা হয় তবে ঐ রাশিমালাকে ঐ নির্দিষ্ট অক্ষরের ঘাতের উর্দ্ধক্রমে সাজান হইয়াছে বলা হইবে।

$x^5yz^4+x^4y^2z^3+x^3y^3z^3+x^2y^4z+xy^5$-রাশিমালাটি x ও z এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে এবং y-এর ঘাতের উর্দ্ধক্রম অনুসারে সাজান হইয়াছে। আবার রাশিমালাটিকে যদি $xy^5+x^2y^4z+x^3y^3z$ $+x^4y^2z^3+x^5yz^4$-রূপে সাজান যায় তবে উহাকে x ও z-এর ঘাতের উর্দ্ধক্রমে এবং y-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজন হইয়াছে বলিতে হইবে।

67. গুণনের ব্যবহারিক প্রণালী ঃ

কোনও একটি মিশ্র রাশিমালাকে অপর একটি মিশ্র রাশিমালা দ্বারা গুণ করিবার পূর্বে গুণ্য এবং গুণক রাশির অন্তর্গত কোনও একটি সাধারণ অক্ষরের ঘাতের উর্দ্ধক্রম বা অধঃক্রম অনুসারে উভয় রাশিমালার পদগুলিকে সাজাইয়া লইয়া গুণনক্রিয়া সম্পন্ন করিতে হয়।

একটি বহুপদ রাশিকে একটি বহুপদ রাশি দ্বারা গুণ করিবার ব্যবহারিক প্রণালী নিম্নের উদাহরণটিতে প্রদর্শিত হইল।

উদাহরণ 1. $x^3-x^2y+xy^2-y^3$-কে x^2+y^2-দ্বারা গুণ কর।

$$\text{গুণ্য} = x^3-x^2y+xy^2-y^3$$
$$\text{গুণক} = x^2+y^2$$

x^2-এর দ্বারা গুণনের ফল $= x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3$

y^2-এর দ্বারা গুণনের ফল $= \qquad x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$

সম্পূর্ণ গুণফল $= x^5-x^4y+2x^3y^2-2x^2y^3+xy^4-y^5$

উদাহরণের প্রক্রিয়া বিশ্লেষণ।

গুণ্য ও গুণক উভয়কেই x-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া গুণ্যের নীচে গুণকটি লেখা হইয়াছে এবং গুণকের নীচে একটি অনুভূমিক সরলরেখা টানা হইয়াছে। তৎপরে বামদিক হইতে আরম্ভ করিয়া গুণকের প্রত্যেকটি পদের দ্বারা গুণ্যকে পৃথক পৃথকভাবে গুণ করিয়া আংশিক গুণফলগুলিকে সারি করিয়া একটির নীচে একটি এইরূপভাবে স্থাপন করা হইয়াছে যেন উহাদের সদৃশ পদগুলি একই স্তম্ভে থাকে। তৎপরে আংশিক গুণফলের সর্বনিম্ন সারির নীচে একটি অনুভূমিক সরলরেখা টানিয়া বিভিন্ন স্তম্ভের বীজগণিতীয় সমষ্টিগুলি ঐ সরলরেখার নীচে লেখায় নির্ণেয় গুণফল পাওয়া গিয়াছে।

উদাহরণ 2. $x^4+x^2y^2-x^3y-xy^3+y^4$-কে x^2-xy দ্বারা গুণ কর।

$$\text{গুণ্য} = x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4$$
$$\text{গুণক} = x^2-xy$$

x^2-দ্বারা গুণনের ফল $= x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4$

$-xy$ দ্বারা গুণনের ফল $= \qquad -x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5$

সম্পূর্ণ গুণফল $= x^6-2x^5y+2x^4y^2-2x^3y^3+2x^2y^4-xy^5$

দ্রষ্টব্য 1. উদাহরণটিতে গুণ্য এবং গুণক উভয় রাশিকেই উহাদের অন্তর্গত x-এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজান হইয়াছে বলিয়া আংশিক গুণফলের সদৃশ পদগুলি একই স্তম্ভে পড়িয়াছে এবং উহাদের যোগ করা সহজ হইয়াছে।

2. উপরের উদাহরণটিতে আরও একটি বিষয় লক্ষ্য করিবার আছে। গুণ্য চতুর্থমানের সমমাত্র রাশিমালা, গুণক দ্বিতীয় মানের সমমাত্র রাশিমালা এবং গুণফল যষ্ঠমানের সমমাত্র রাশিমালা। সাধারণতঃ দুইটি সমমাত্র রাশিমালার গুণফল একটি সমমাত্র রাশিমালাই হয় এবং গুণফলের মান গুণ্য ও গুণকের মানের সমান হয়।

উদাহরণ 3. $2x^3-\frac{1}{2}x^2y-\frac{2}{3}y^3$-কে $\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}y^2$-দ্বারা গুণ কর।

গুণ্য $=2x^3-\frac{1}{2}x^2y-\frac{2}{3}y^3$

গুণক $=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}y^2$

$\frac{1}{4}x^2$-দ্বারা গুণনের ফল $=\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{8}x^4y \qquad -\frac{1}{6}x^2y^3$

$-\frac{3}{2}y^2$-দ্বারা গুণনের ফল $= \qquad -3x^3y^2+\frac{3}{4}x^2y^3+y^5$

সম্পূর্ণ গুণফল $=\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{8}x^4y-3x^3y+\frac{7}{12}x^2y^3+y^5$

প্রশ্নমালা 12

প্রথম রাশিটিকে দ্বিতীয় রাশিটি দ্বারা গুণ কর।

1. $a+b$ $a-b$; $2a+3$, $3a+4$;
2. $4a+5$, $5a-8$; $5p-6$, $6p-5$
3. $n-a$, $n-b$; $xy-yz$, $zx+xy$
4. $2a^2+3xy$, $3a^2-2xy$; $x+y+z$, $x-y$
5. x^2+x+1, $x-1$; $a^4-a^2b^2+b^4$, a^2+b^2
6. $2a^2-6ab+9b^2$, $2a+3b$; 7. y^3-y^2+y-1, $y+3$
8. $a^3+a^2b+ab^2+b^3$, $a-b$; 9. m^3-3m^2-4m-5, $4m-5$

10. $16a^4+8a^3b+4a^2b^2+2ab^3+b^4,\ 2a-b$

11. $\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{6}ab+\frac{1}{9}b^2,\ \frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b$; 12. $a^{2m}-a^mb^n+b^{2n},\ a^m+b^n$

সরল কর :

13. $(x+y)(x-y)+(y+z)(y-z)+(z+x)(z-x)$

14. $(5a+2b)(5a-2b)-(3a+2b)(3a-2b)$

15. $(ax+by)(ax-by)+(by+ax)(by-ax)$

16. $(a^2+ab+b^2)(a-b)+(a^2-ab+b^2)(a+b)$

ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর :

17. $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$; 18. $(a-2)(a-3)(a-4)$

19. $(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)$

20. $(2m+3n)(2m-3n)(4m^2+9n^2)$

ভাগ

68. 15কে 5-এর দ্বারা ভাগ করিতে বলিলে আমরা একটি সংখ্যা নির্ণয় করি যাহা দ্বারা 5কে গুণ করিলে 15 হইবে। স্পষ্টতঃই $5\times3=15$; সুতরাং আমরা বলি $15\div5=3$।

অনুরূপে কোনও একটি রাশি a-কে b দ্বারা ভাগ করিতে বলিলে বুঝিতে হইবে এমন একটি সংখ্যা c নির্ণয় করিতে বলা হইয়াছে যাহা দ্বারা bকে গুণ করিলে গুণফল a-এর সমান হইবে। অর্থাৎ, যদি $b\times c=a$ হয়, তবে $a\div b=c$ হইবে। এইরূপ $y\times z=x$ হইলে, $x\div y=z$ এবং $x\div z=y$.

ভাগ প্রক্রিয়ায় যে রাশিকে ভাগ করা হয় তাহাকে ভাজ্য (Dividend), যাহা দ্বারা ভাগ করা হয় তাহাকে ভাজক (Divisor) এবং ভাগ করার ফলে যে রাশিটি পাওয়া যায় তাহাকে ভাগফল (Quotient) বলে। $a\div b=c$ স্থলে a ভাজ্য, b ভাজক এবং c ভাগফল।

অনুসিদ্ধান্ত। যেহেতু $1 \times x = x$; সুতরাং $x \div x = 1$. ইহার তাৎপর্য এই যে কোনও একটি রাশিকে সেই রাশিটি দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল সর্বদা 1 হয়।

দ্রষ্টব্য ঃ ভাগের পর কিছু অবশিষ্ট না থাকিলে ঐ ভাগক্রিয়াকে সম্পূর্ণ ভাগক্রিয়া এবং ভাগফলকে **সম্পূর্ণ** ভাগফল বলে। aকে b দ্বারা ভাগ করিলে যে সম্পূর্ণ ভাগফল পাওয়া যায় তাহাকে $\frac{a}{b}$, a/b এই ভগ্নাংশের আকারেও লেখা হয়। '/' চিহ্নটিকে 'Solidus' বলে।

69. ভাগ সম্বন্ধীয় কয়েকটি মৌলিক প্রতিজ্ঞা ঃ

1. একটি রাশিকে অপর একটি রাশিদ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফলকে পুনরায় ভাজক সংখ্যাটি দ্বারা গুণ করিলে গুণফলরূপে সেই প্রথম রাশিটিকেই পাওয়া যায়। অর্থাৎ, $a \div b \times b = a$; ভাগ গুণনের বিপরীত ক্রিয়া বলিয়া ভাগ ও গুণন একে অন্যের ফল সম্পূর্ণ খণ্ডন করে।

প্রমাণ ঃ $a \div b$-কে x দ্বারা সূচিত করিলে,

ভাগের সংজ্ঞানুসারে, $x \times b = a$

$\therefore \quad a \div b \times b = x \times b = a$

2. কোনও একটি রাশিকে অন্য দুইটি রাশিদ্বারা পরপর ভাগ করা এবং পূর্বোক্ত রাশিটিকে শেষোক্ত রাশিদুইটির গুণফলের দ্বারা ভাগ করা একই কথা। অর্থাৎ, $a \div b \div c = a \div bc$।

প্রমাণ। $(a \div b \div c) \times bc = (a \div b) \div c \times c \times b \quad [\because b \times c = c \times b.]$

$$= (a \div b) \times b = a$$

প্রথম ধাপে c-এর দ্বারা ভাগ করিয়া পুনরায় c এর দ্বারা গুণ করায় ভাজ্য $a \div b$ অপরিবর্তিত রহিল। দ্বিতীয় ধাপে b দ্বারা ভাগ করিয়া পুনরায় b দ্বারা গুণ করায় ভাজ্য a অপরিবর্তিত রহিল।

$(a\div b\div c)$-কে bc দ্বারা গুণ করায় গুণফল a হইল সুতরাং ভাগের সংজ্ঞানুসারে a কে bc দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল $a\div b\div c$ হইবে। অর্থাৎ $a\div b\div c=a\div bc$

অনুসিদ্ধান্ত। $a\div b\div c=a\div c\div b$; কারণ, প্রত্যেকেই $a\div bc$এর-সমান।

দুইটি রাশির গুণফল$=1$ হইলে একটি রাশিকে অপর রাশিটির অন্যোন্যক বলে। $3\times\frac{1}{3}=1 \quad \therefore \quad \frac{1}{3}$, 3-এর অন্যোন্যক আবার 3, $\frac{1}{3}$-এর অন্যোন্যক। অনুরূপে $\frac{1}{x}$, x-এর অন্যোন্যক এবং x, $\frac{1}{x}$ এর অন্যোন্যক।

3. কোনও একটি রাশিকে অপর একটি রাশিদ্বারা ভাগ করা এবং পূর্বোক্ত রাশিটিকে শেষোক্ত রাশিটির অন্যোন্যকের দ্বারা গুণ করা একই কথা। অর্থাৎ, $a\div b=a\times\frac{1}{b}$.

প্রমাণ। এখন, $\frac{1}{b}\times b=1\div b\times b=1$

$$\therefore \quad a\times\frac{1}{b}\times b=a\times 1=a$$

অর্থাৎ, $\left(a\times\frac{1}{b}\right)\times b=a$

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে, $a\div b=a\times\frac{1}{b}$

অনুসিদ্ধান্ত 1. $a\div b\times c=a\times c\div b$; কারণ, $a\div b\times c=a\times\frac{1}{b}\times c$ $=a\times c\times\frac{1}{b}=a\times c\div b.$

অনুসিদ্ধান্ত 2. কতকগুলি গুণ ও ভাগচিহ্নযুক্ত প্রতীক পাশাপাশি থাকিলে উহাদের একটিমাত্র ভাগচিহ্নে পর্যবসিত করা যায়।

$$p \div x \times q \div y \times r \div z = pqr \div xyz$$

70. ভাগফলের চিহ্ন সম্বন্ধীয় নিয়ম।

যেহেতু $a \times b = ab \quad \therefore \quad ab \div a = b$ এবং $ab \div b = a$

যেহেতু $a \times (-b) = -ab$

$\therefore \quad (-ab) \div a = -b$ এবং $(-ab) \div (-b) = a$

আবার যেহেতু $(-a) \times (-b) = ab$

$\therefore \quad ab \div (-a) = -b$ এবং $ab \div (-b) = -a$

উপরিলিখিত ভাগফলগুলি হইতে আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হইতে পারি যে গুণনের চিহ্ন বিষয়ক নিয়মগুলি ভাগের বেলায়ও প্রযোজ্য অর্থাৎ, গুণনের বেলা গুণ্য ও গুণক সদৃশ চিহ্নযুক্ত হইলে গুণফলটি যেমন ধনাত্মক হয় এবং উহারা অসদৃশ চিহ্নযুক্ত হইলে গুণফল ঋণাত্মক হয়। ভাগের বেলাও তেমনি ভাজ্য ও ভাজক সদৃশ চিহ্নযুক্ত হইলে ভাগফলটি ধনাত্মক এবং উহারা অসদৃশ চিহ্নযুক্ত হইলে ভাগফল ঋণাত্মক হইয়া থাকে।

71. একটি সরল রাশিকে অপর একটি সরল রাশি দ্বারা ভাগ।

$$2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11\ ;\ 55 = 5 \times 11$$

এখন $\frac{2310}{55} = 42$ আবার, $\frac{2310}{55} = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11}{5 \times 11} = 2 \times 3 \times 7 = 42$

সুতরাং দেখা যাইতেছে ভাজ্য ও ভাজক উভয়ের সাধারণ গুণনীয়কগুলি অপসারিত করিলে ভাগফলের কোনরূপ তারতম্য হয় না।

ভাগকার্যে ভাজ্য ও ভাজক হইতে সাধারণ গুণনীয়কগুলিকে অপসারিত করার নাম অপসারণ ক্রিয়া। বীজগণিতে একটি সরলরাশিকে অপর একটি সরলরাশি দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফল নির্ণয় করিবার সময়

এই অপসারণ ক্রিয়ার সাহায্য লওয়া যাইতে পারে। নিম্নের গুলি দেখ।

(ক) যেহেতু, $4x^2y \times 5x^3y^2z = 20x^5y^3z$

অতএব, $20x^5y^3z \div 5x^3y^2z = 4x^2y$

আবার দেখ $\dfrac{20x^5y^3z}{5x^3y^2z} = \dfrac{5 \times 4 \times x^3 \times x^2 \times y^2 \times y \times z}{5 \times x^3 \times y^2 \times z} = 4x^2y$

(খ) যেহেতু, $(-15a^3b^2c^2) \times (-4a^2b^4b^3) = 60a^5b^6c^5$

অতএব, $60a^5b^6c^5 \div (-15a^3b^2c^2) = -4a^2b^4c^3$

আবার দেখ $\dfrac{60a^5b^6c^5}{-15a^3b^2c^2}$

$= \dfrac{(-15) \times (-4) \times a^3 \times a^2 \times b^4 \times b^2 \times c^3 \times c^2}{-15 \times a^3 \times b^2 \times c^2}$

$= -4a^2b^4c^3$

(গ) যেহেতু, $(-6p^{12}q^2r^3s) \times (5p^2q^2r^2) = -30p^{14}q^4r^5s$

অতএব, $(-30p^{14}q^4r^5s) \div (-6p^{12}q^2r^3s) = 5p^2q^2r^2$

আবার দেখ $\dfrac{-30p^{14}q^4r^5s}{-6p^{12}q^2r^3s}$

$= \dfrac{(-6) \times (5) \times p^{12} \times p^2 \times q^2 \times q^2 \times r^3 \times r^2 \times s}{(-6) \times p^{12} \times q^2 \times r^3 \times s}$

$= 5p^2q^2r^2$

উপরের দৃষ্টান্তগুলি হইতে আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হইতে পারি যে ভাজ্য ও ভাজক উভয়েই সরলরাশি হইলে ভাজক যে সকল গুণনীয়কের গুণফল সেই সকল গুণনীয়কগুলি ভাজ্য হইতে অপসারিত করিলে যে গুণনীয়কগুলি অবশিষ্ট থাকে তাহাদের গুণফলের সহিত ভাজ্য ও ভাজক সদৃশ চিহ্নযুক্ত হইলে ধনচিহ্ন এবং অসদৃশ চিহ্নযুক্ত হইলে ঋণচিহ্ন যোগ করিলেই নির্ণেয় ভাগফল পাওয়া যায়।

মন্তব্য। অপসারণ প্রক্রিয়া প্রয়োগের সময় লক্ষ্য রাখিবে যে, ভাজ্য এবং ভাজকের কেবলমাত্র সাধারণ গুণনীয়কগুলিই অপসারণ করা যায়।

যেমন, $6a \div 3a = 2$ কিন্তু $(6+a) \div (3+a) \neq 2$ কারণ $(6+a)$ এবং $(3+a)$-র কোনও সাধারণ গুণনীয়ক নাই।

উদাহরণ 1. $12a^4b^3c^2$-কে $-3a^2b^2c^2$ দ্বারা ভাগ কর।

এক্ষেত্রে ভাজ্য $=(-3) \times (4) \times a^2 \times a^2 \times b^2 \times b \times c^2$

ভাজক $=(-3) \times a^2 \times b^2 \times c^2$

$\therefore$ ভাগফল $= 4a^2b$.

উদাহরণ 2. $-15x^5y^4z$-কে $-5x^2yz$ দ্বারা ভাগ কর।

ভাজ্য $=(-5) \times (3) \times x^3 \times x^2 \times y^3 \times y \times z$

ভাজক $=(-5) \times x^2 \times y \times z$ $\quad \therefore$ ভাগফল $= 3x^3y^3$.

72. ভাগের সূচক নিয়ম (Index Law)

m এবং n অখণ্ড ধনসংখ্যা এবং $m > n$ হইলে $a^m \div a^n = a^{m-n}$

অর্থাৎ, ভাজ্যের a-র সূচক হইতে ভাজকের a-র সূচক বিয়োগ করিলে ভাগফলের a-র সূচক পাওয়া যায়। ইহাই ভাগের সূচক নিয়ম।

প্রমাণ। যেহেতু $a^{m-n} \times a^n = a^{m-n+n} = a^m$ [গুণনের সূচক নিয়ম অনুসারে]

$\therefore$ $a^m \div a^n = a^{m-n}$ [ভাগের সংজ্ঞা অনুসারে]

মন্তব্য। এ স্থলে লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে, $m > n$ হওয়া প্রয়োজন, নতুবা $m-n$ ধনরাশি হইবে না এবং গুণনের সূচক নিয়ম প্রয়োগ করা চলিবে না।

অনুসিদ্ধান্ত 1. $a \div a = 1$, আবার সূচক নিয়মানুসারে,

$a \div a = a^{1-1} = a^0$ $\quad \therefore$ $a^0 = 1$

অনুরূপে $a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0 = 1$.

সুতরাং কোনও রাশির সূচক শূন্য হইলে উহার মান 1 হইবে।

73. ভাগের সূচক নিয়মানুসারে একটি সরলরাশিকে অপর একটি সরলরাশি দ্বারা ভাগ করিবার নিয়মটি এইরূপ—

1. প্রথমেই চিহ্নবিষয়ক নিয়ম দ্বারা ভাগফলের চিহ্ন স্থির করিয়া লইতে হয়।

2. পরে ভাজ্যের সংখ্যাসূচক সহগকে ভাজকের সংখ্যাসূচক সহগের দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফলের সংখ্যাসূচক সহগটি কত হইবে তাহা ধার্য করিতে হয়।

3. সর্বশেষে ভাজ্যের অন্তর্গত কোনও অক্ষরের সূচক হইতে ভাজকের অন্তর্গত উক্ত অক্ষরের সূচক বিয়োগ করিলে ভাগফলে ঐ নির্দিষ্ট অক্ষরটির সূচক কত হইবে তাহা পাওয়া যায়।

দ্রষ্টব্য 1. কোনও রাশিতে সংখ্যাসূচক সহগের উল্লেখ না থাকিলে ঐ রাশিটির সহগ '1' ধরিতে হয়। যেমন $x=1\times x$

2. কোনও রাশির অন্তর্গত কোনও অক্ষরের উপর সূচকের উল্লেখ না থাকিলেও ঐ অক্ষরটির সূচক '1' ধরিতে হয়। যেমন $x=x^1$

3. ভাজ্য এবং ভাজকের কোনও একটিতে যদি একটি অক্ষর থাকে এবং অপরটিতে উহা না থাকে তবে যেখানে ঐ অক্ষরটি নাই সেখানেও শূন্য সূচক বিশিষ্ট ঐ অক্ষরটি আছে বলিয়া কল্পনা করিতে হয়। [যেহেতু (যে কোনও সংখ্যা)$^0=1$]

নিম্নের উদাহরণগুলি লক্ষ্য করিলে উপরিউক্ত নিয়মগুলির প্রয়োগ বুঝিতে পারা যাইবে।

উদাহরণ 1. $-8x^5y^7a^3b$-কে $4x^2y^2a^2b$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\text{ভাগফল}=\frac{\text{ভাজ্য}}{\text{ভাজক}}=\frac{-8x^5y^7a^3b}{4x^2y^2a^2b}.$$

$$=\frac{-8}{4}\times\frac{x^5}{x^2}\times\frac{y^7}{y^2}\times\frac{a^3}{a^2}\times\frac{b}{b}$$

$$= -2 \times x^{(5-2)} \times y^{(7-2)} \times a^{(3-2)} \times b^{(1-1)}$$

$$= -2 \times x^3 \times y^5 \times a^1 \times 1$$

$$[\because b^{(1-1)} = b^0 = 1]$$

$$= -2x^3y^5a.$$

উদাহরণ 2. $-135a^6b^{18}c^{10}d^{20}$কে $-65a^4b^{10}c^7d^{15}$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\text{ভাগফল} = \frac{-135a^6b^{18}c^{10}d^{20}}{-65a^4b^{10}c^7d^{15}}$$

$$= \frac{-135}{-65} \times \frac{a^6}{a^4} \times \frac{b^{18}}{b^{10}} \times \frac{c^{10}}{c^7} \times \frac{d^{20}}{d^{15}}$$

$$= \frac{27}{13} \times a^{(6-4)} \times b^{(18-10)} \times c^{(10-7)} \times d^{(20-15)}$$

$$= \frac{27}{13}a^2 \times b^8 \times c^3 \times d^5$$

$$= \frac{27}{13}a^2b^8c^3d^5$$

উদাহরণ 3. $a^{3x-y} \times a^{3y-z} \times a^{3z-x}$কে a^{x+y+z} দ্বারা ভাগ কর।

$$\text{ভাগফল} = \frac{a^{3x-y} \times a^{3y-z} \times a^{3z-x}}{a^{x+y+z}}$$

$$= \frac{a^{3x-y+3y-z+3z-x}}{a^{x+y+z}}$$

$$= \frac{a^{2x+2y+2z}}{a^{x+y+z}}$$

$$= a^{(2x+2y+2z)-(x+y+z)}$$

$$= a^{x+y+z}.$$

উদাহরণ 4. সরল কর :

$$4m^5 \times 3n^5 \div 2m^3n^3 + 16m^4n^4 \div 8m^2n^2 - 4mn \times 2mn$$

প্রদত্ত রাশিমালা

$$= 12m^5n^5 \div 2m^3n^3 + 16m^4n^4 \div 8m^2n^2 - 8m^2n^2$$

$$= \frac{12m^5n^5}{2m^3n^3} + \frac{16m^4n^4}{8m^2n^2} - 8m^2n^2$$

$$= \frac{12}{2} \times \frac{m^5}{m^3} \times \frac{n^5}{n^3} + \frac{16}{8} \times \frac{m^4}{m^2} \times \frac{n^4}{n^2} - 8m^2n^2$$

$$= 6 \times m^{(5-3)} \times n^{(5-3)} + 2 \times m^{(4-2)} \times n^{(4-2)} - 8m^2n^2$$

$$= 6m^2n^2 + 2m^2n^2 - 8m^2n^2$$

$$= 0$$

প্রশ্নমালা 13

প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা ভাগ কর :

(1 হইতে 10 পর্যন্ত অপসারণ প্রক্রিয়ায় ও 11 হইতে 17 পর্যন্ত ভাগের সূচক প্রণালীতে)

1. $8x^3, 4x$
2. $-27x^8, -3x^5$
3. $9xy, -3x$
4. $-24x^3y^4, -6x^2y^2$
5. $-98a^{16}b^{10}c^7, 7a^{12}b^5c^4$
6. $-105x^4yz^5a^{10}, 7xyz^4a^5$
7. $\frac{5}{11}x^4y^3z^5, \frac{15}{22}x^3y^3z^3$
8. $-\frac{3}{5}a^8b^{17}c^6x^9y^{10}z^{11}p^{12}, \frac{7}{10}x^5p^{10}a^6b^{12}z^5cy^2$
9. $x^ay^bz^c, x^by^cz^a$ $[a > b > c]$
10. $2a^mb^nc^p, -3ab^2c^3$ $[m > 1, n > 2, p > 3]$
11. $-6(abcd)^{12-n}, -2(abcd)^{2n-3}$ $[(12-n) > (2n-3)]$

12. $2\cdot08x^{18}y^5z^{30}a^{20}b^{16}$-কে কোন্ রাশি দ্বারা গুণ করিলে গুণফল $-4\cdot16a^{30}b^{20}c^5x^{20}y^{10}z^{39}$ হইবে ?

13. $-\frac{30}{17}a^{15}b^{14}c^{13}x^{12}y^{11}z^{10}$-কে কোন রাশি দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল $-\frac{510}{68}a^{10}b^9c^8x^{11}y^9z^8$ হইবে ?

সরল কর :

14. $18x^3 \div 6x \times 2x^4$ 15. $15a^4 \times 3a^7 \div 9a^{10}$

16. $(a^2b \times b^2c \times c^2a) \div a^2b^2c^2$

17. $20x^4y^6 \div 10x^2y^4 \times 3xy \div 6x^2y^2$

18. $12x^3 \div 2x - 9x^4y \div 3x^2y + 8x^5z^2 \div 4x^3z^2$

19. $16a^6b^2c \div 4a^4c + 15a^5b^3c^2 \div (-5a^3bc^2) - a^4b^4 \div (-a^2b^2)$

20. $(-15p^3q) \div 5p^3q^2 \times (-6pq^3) \div 9p^2q \div 4q^2 \times 2p^3q^3$

মিশ্ররাশিকে (Polinomial) সরলরাশি (Monomial) দ্বারা ভাগ :

74. এই শ্রেণীর ভাগকার্য ভাগের বিচ্ছেদ নিয়মানুসারে সম্পাদন করা হইয়া থাকে। ভাগের বিচ্ছেদ নিয়ম সম্পর্কে পূর্ববর্তী অধ্যায়ে আলোচনা করা হইয়াছে।

ভাগের বিচ্ছেদ নিয়মানুসারে,

$$(a+b+c+d+e+\cdots\cdots)\div x$$
$$=\frac{a+b+c+d+e+\cdots\cdots}{x}$$
$$=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}+\frac{d}{x}+\frac{e}{x}+\cdots\cdots$$

অর্থাৎ কোন মিশ্ররাশি বা বহুপদ রাশিকে অপর কোন সরল রাশি বা একপদ রাশি দ্বারা ভাগ করিতে হইলে ভাজ্যের প্রত্যেক পদকে ভাজক দ্বারা পৃথক পৃথক ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফলগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি লইলে উহাই হইবে নির্ণেয় ভাগফল।

উদাহরণ 1. $4a^2b-3ab^2+4ab$-কে ab দ্বারা ভাগ কর।

$$\text{নির্ণেয় ভাগফল}=\frac{4a^2b-3ab^2+4ab}{ab}$$

$$=\frac{4a^2b}{ab}-\frac{3ab^2}{ab}+\frac{4ab}{ab}$$

$$=4a-3b+4.$$

উদাহরণ 2. $3x^6y^2z^5-4x^5y^3z^4+5x^4y^4z^3-6x^3y^5z^2$-কে $-12x^2y^2z^2$ দ্বারা ভাগ কর।

নির্ণেয় ভাগফল

$$=\frac{3x^6y^2z^5-4x^5y^3z^4+5x^4y^4z^3-6x^3y^5z^2}{-12x^2y^2z^2}$$

$$=\frac{+3x^6y^2z^5}{-12x^2y^2z^2}+\frac{-4x^5y^3z^4}{-12x^2y^2z^2}+\frac{+5x^4y^4z^3}{-12x^2y^2z^2}+\frac{-6x^3y^5z^2}{-12x^2y^2z^2}$$

$$=(-\tfrac{1}{4}x^4z^3)+(+\tfrac{1}{3}x^3yz^2)+(-\tfrac{5}{12}x^2y^2z)+(+\tfrac{1}{2}xy^3)$$

$$=-\tfrac{1}{4}x^4z^3+\tfrac{1}{3}x^3yz^2-\tfrac{5}{12}x^2y^2z+\tfrac{1}{2}xy^3.$$

প্রশ্নমালা 14

প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা ভাগ কর:

1. $x^2+3x,\ x$ 2. $a^3b-ab^3,\ ab$
3. $-3p^2q^r+9pq^{2r},\ -3pq^r$
4. $ab^2x^3y^4-a^2bx^4y^3,\ abx^3y^3$
5. $-6x^3y^2z+4x^2y^3z^2,\ -2x^2y^2z$
6. $-2x^3y+4x^2y^2-6xy^3,\ -2xy$
7. $-2m^4n^2+3m^3n^3-4m^2n^4,\ -m^2n^2$
8. $-5a^5b+10a^4b^4-15a^3b^5,\ -5a^3b^3$

9. $6p^6q^4-12p^5q^5+6p^4q^6,\ 6p^4q^4$

10. $2x^4yz-3x^3y^2z+4x^2y^3z-5xy^4z,\ xyz$

11. $4a^6b^2+6a^5b^3-8a^4b^4+10a^3b^5-12a^2b^6,\ 2a^2b^2$

12. $3x^7y^5z^3-6x^5y^7z^5-9x^3y^3z^7-12x^7y^3z^5,\ 3x^3y^3z^3$

13. $-2p^8q^6r^4+2p^6q^4r^8-2p^4q^8r^6+2p^4q^4r^4,\ -2p^4q^4r^4$

14. $am^5n^6p^7-bm^7n^5p^6-cm^4n^7p^5,\ dm^5n^5p^5$

15. $-\frac{1}{2}x^6y^5z^4+\frac{1}{3}x^6y^7z^8-\frac{1}{4}x^8y^6z^5,\ -\frac{1}{12}x^5y^4z^3$

16. $\frac{3}{7}abc^2-\frac{4}{7}ab^2c-\frac{5}{7}a^2bc+abc,\ \frac{1}{14}abc$

17. $1{\cdot}2m^3y-1{\cdot}5m^2y^2-1{\cdot}8my^3+2{\cdot}1my,\ {\cdot}3my$

18. $-3{\cdot}5x^5y^3a^3b^4-2{\cdot}1x^3y^5a^5b^5+1{\cdot}5x^4y^4a^4b^3,\ -10{\cdot}5abx^3y^3$

19. $3a^3b^3+4a^4b^4-5a^5b^5+2a^2b^2c^2d^2$ এই রাশিটিকে অপর একটি রাশি দ্বারা ভাগ করায়, ভাগফল a^2b^3 এবং ভাগশেষ $2a^2b^2c^2d^2$ পাওয়া গেল। রাশিটি নির্ণয় কর।

20. তোমাকে একটি ভাগ-ক্রিয়া সম্পাদন করিতে বলা হইল ; উহার ভাজ্য $27m^3n^2p-21mn^3p^2-15p^3m^2n$, ভাগফল $3mnp$ এবং ভাগশেষ $6m^3n^2p-9mn^3p^2$; ভাজকটি নির্ণয় কর।

ষষ্ঠ অধ্যায়

সরল সূত্রাবলী ও তাহার প্রয়োগ

75. বীজগণিতীয় প্রতীকের সাহায্যে সংক্ষিপ্ত ও সুন্দর রূপে প্রকাশিত কোন সিদ্ধান্তকে বীজগণিতীয় সূত্র (Algebraic Formula) বা শুধু সূত্র (Formula) বলে। সূত্রগুলিতে ব্যবহৃত প্রতীকের যে কোনও মানের জন্যই এই সিদ্ধান্তগুলি সত্য।

এই সূত্রাবলীর সাহায্য লইলে অঙ্ক কষিবার প্রণালী সংক্ষিপ্ত হয় বলিয়া অনাবশ্যক পরিশ্রম বহুলাংশে হ্রাস পায়। এই কারণে সূত্রগুলি

বিশেষভাবে মনে রাখা দরকার। নিম্নে কয়েকটি অতি প্রয়োজনীয় গুণনের সহজ সূত্র দেওয়া হইল।

76. প্রথম সূত্র ঃ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

অর্থাৎ, যে কোনও দুইটি রাশির সমষ্টির বর্গ নির্ণয় করিতে হইলে উহাদের বর্গদ্বয়ের সমষ্টির সহিত রাশি দুইটির গুণফলের দ্বিগুণ যোগ করিতে হইবে।

প্রমাণ। $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a(a+b)+b(a+b)$

$$=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(\because \quad ba=ab)$$

বিপরীতক্রমে, $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

অনুসিদ্ধান্ত। $a^2+b^2=a^2+2ab+b^2-2ab=(a+b)^2-2ab$

সূত্রটির প্রয়োগ

উদাহরণ 1. $(2a+3x)$-এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(2a+3x)^2=(2a)^2+2(2a)(3x)+(3x)^2$$
$$=4a^2+12ax+9x^2$$

উদাহরণ 2. $(4p^3+5q^4)$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(4p^3+5q^4)^2=(4p^3)^2+2(4p^3)(5q^4)+(5q^4)^2$$
$$=16p^6+40p^3q^4+25q^8$$

উদাহরণ 3. $x+y+z$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$(x+y+z)^2=\{(x+y)+z\}^2$ [$(x+y)$-কে একটি পদ ধরিয়া]

$$=(x+y)^2+2(x+y)z+z^2$$
$$=x^2+2xy+y^2+2zx+2zy+z^2$$
$$=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx \quad [\because zy=yz]$$

উদাহরণ 4. 67-এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(67)^2=(60+7)^2=(60)^2+2(60)(7)+(7)^2$$
$$=3600+840+49=4489$$

উদাহরণ 5. সরল কর :

$$(2x+3y-z)^2+2(2x+3y-z)(2x-3y+z)+(2x-3y+z)^2$$

$(2x+3y-z)$-এর পরিবর্তে a এবং $(2x-3y+z)$-এর পরিবর্তে b ধরিলে

প্রদত্ত রাশিমালা $=a^2+2ab+b^2$
$$=(a+b)^2$$
$$=\{(2x+3y-z)+(2x-3y+z)\}^2$$
$$=(4x)^2=16x^2$$

উদাহরণ 6. $m=12$ ও $n=-10$ হইলে, $25m^2+40mn+16n^2$-এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(5m)^2+2(5m)(4n)+(4n)^2$
$$=(5m+4n)^2=\{5(12)+4(-10)\}^2$$
$$=(60-40)^2=(20)^2$$
$$=400.$$

উদাহরণ 7. $a+\frac{1}{a}=4$ হইলে $a^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2$-এর মান নির্ণয় কর।

$$a^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2a\times\frac{1}{a}$$
$$=(4)^2-2 \quad \left[\because \quad a\times\frac{1}{a}=1\right]$$
$$=14$$

প্রশ্নমালা 15

সূত্র সাহায্যে বর্গ নির্ণয় কর :

1. $x+y$; $p+q$; $m+n, y+z$
2. $a+3$; $5+x$; $2a+1$; $3x+2$
3. $2x+3y$; $3b+2c$; $4p+5q$; $5m+6n$
4. a^2+b^2 ; b^2+c^2 ; $2p^2+3q^2$; m^2+2n^2
5. $2xy+5yz$; $3yz+7zx$; $4bc+3ca$; $2ax+3by$
6. $x+\frac{1}{x}$; $2y+\frac{1}{2y}$; $3p+\frac{2}{3p}$; $4m+\frac{1}{8n}$
7. $(3+5)$; $(5+7)$; 31 ; 102 ; 1003
8. $2a+3b+4c$; $xy+yz+zx$; $ax+by+cz$; $p^2+q^3+r^4$
9. $m+2n+3p+4q$; $2a+3b+4x+5y$

সরল কর :

10. $(3m+2n)^2+2(3m+2n)(2n-3m)+(2n-3m)^2$
11. $(6x-7y)^2+2(6x-7y)(8y-5x)+(8y-5x)^2$
12. $(p+2q-3r)^2+2(p+2q-3r)(p-2q+3r)+(p-2q+3r)^2$
13. $2{\cdot}63\times2{\cdot}63+2\times2{\cdot}63\times3{\cdot}37+3{\cdot}37\times3{\cdot}37$
14. $631\times631+2\times631\times369+369\times369$

মান নির্ণয় কর :

15. $16x^2+24xy+9y^2$, যখন $x=4$, $y=3$
16. $36a^2+12a+1$, যখন $a=-1$
17. $x^2+16x+64$, যখন $a=-4$
18. $x^6+2x^3y^3+y^6$, যখন $x=-1$, $y=2$
19. $4m^4+12m^2n^2+9n^4$, যখন $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{3}$
20. $a+\frac{1}{a}=6$ হইলে দেখাও যে $a^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2=34$
21. $m+\frac{1}{m}=5$ হইলে দেখাও যে $m^4+\left(\frac{1}{m}\right)^4=527$

22. $x+\frac{1}{x}=2$ হইলে দেখাও যে $x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2=x^4+\frac{1}{x^4}$

23. $m+\frac{1}{m}=\sqrt{2}$ হইলে দেখাও যে $m^2+\frac{1}{m^2}=0$

24. $a+b=5$ এবং $ab=4$ হইলে a^2+b^2-এর মান কত ?

25. $x+y=7$ এবং $xy=-10$ হইলে দেখাও যে $x^2+y^2=69$.

77. দ্বিতীয় সূত্র ঃ $(a-b)^2=a^2+2ab+b^2$.

অর্থাৎ, দুইটি রাশির বিয়োগফলের বর্গ নির্ণয় করিতে হইলে উহাদের বর্গদ্বয়ের সমষ্টি হইতে রাশিদুইটির গুণফলের দ্বিগুণ বিয়োগ করিতে হইবে।

প্রমাণ। $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a(a-b)-b(a-b)$
$$=a^2-ab-ba+b^2$$
$$=a^2-2ab+b^2$$

এই সূত্রটি প্রকৃতপক্ষে পূর্ব সূত্রেরই অন্তর্ভুক্ত। কারণ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ সূত্রটি দ্বারাও এই সূত্রটি প্রমাণ করা যায়।

$$(a-b)^2=\{a+(-b)\}^2=a^2+2(a)(-b)+(-b)^2$$
$$=a^2-2ab+b^2$$

বিপরীতক্রমে, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

অনুসিদ্ধান্ত 1. $a^2+b^2=a^2-2ab+b^2+2ab=(a-b)^2+2ab$

2. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2-2ab+b^2+4ab$
$$=(a-b)^2+4ab$$

3. যেহেতু $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \quad \cdots \quad (1)$

এবং $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \quad \cdots \quad (2)$

অতএব (1) এর সহিত (2) যোগ করিয়া, $2(a^2+b^2)$
$$=(a+b)^2+(a-b)^2$$

এবং (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া, $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$

উদাহরণ 1. $2x-3y$-এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(2x-3y)^2=(2x)^2-2(2x)(3y)+(3y)^2$$
$$=4x^2-12xy+9y^2$$

উদাহরণ 2. $a-b-c$-এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(a-b-c)^2=\{a-(b+c)\}^2$$
$$=a^2-2a(b+c)+(b+c)^2$$
$$=a^2-2ab-2ac+b^2+2bc+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$$

উদাহরণ 3. $2p-3q+4r$-এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(2p-3q+4r)^2=\{(2p+4r)-3q\}^2$$
$$=(2p+4r)^2-2(2p+4r)(3q)+(3q)^2$$
$$=4p^2+16pr+16r^2-12pq-24qr+9q^2$$
$$=4p^2+9q^2+16r^2-12pq+16pr-24qr$$

উদাহরণ 4. $m-n-p+q$-এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(m-n-p+q)^2=\{(m+q)-(n+p)\}^2$$
$$=(m+q)^2-2(m+q)(n+p)+(n+p)^2$$
$$=(m^2+2mq+q^2)-2(mn+mp+nq+pq)$$
$$+(n^2+2np+p^2)$$
$$=m^2+2mq+q^2-2mn-2mp-2nq-2pq$$
$$+n^2+2np+p^2$$
$$=m^2+n^2+p^2+q^2-2mn-2mp+2mq$$
$$+2np-2nq-2pq$$

উদাহরণ 5. সরল কর :—

$$(ab-bc+ca)^2+(ab-bc-ca)^2-2(ab-bc+ca)$$
$$(ab-bc-ca)$$

$ab-bc+ca$-এর পরিবর্তে x এবং $ab-bc-ca$-এর পরিবর্তে y ধরিয়া প্রদত্ত রাশি $=x^2+y^2-2xy$

$$=(x-y)^2$$
$$=\{(ab-bc+ca)-(ab-bc-ca)\}^2$$
$$=(2ca)^2=4c^2a^2$$

উদাহরণ 6. $p=16, q=9$ হইলে $9p^2-24pq+16q^2$-এর মান নির্ণয় কর।

$$9p^2-24pq+16q^2=(3p)^2-2(3p)(4q)-(4q)^2$$
$$=(3p-4q)^2$$
$$=(48-36)^2$$
$$=12^2=144$$

উদাহরণ 7. $m=6,\ n=4,\ p=2$ হইলে $16(3m-4n)^2-56(3m-4n)p+49p^2$-এর মান কত ?

প্রদত্ত রাশিমালা $=\{4(3m-4n)\}^2-2\times\{4(3m-4n)\}\times(7p)+(7p)^2$

$$=\{4(3m-4n)-7p\}^2=(12m-16n-7p)^2$$
$$=(72-64-14)^2=(-6)^2=36.$$

উদাহরণ 8. 95-এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(95)^2=(100-5)^2=(100)^2-2(100)(5)+(5)^2$$
$$=10000-1000+25=9025.$$

উদাহরণ 9. $x-\frac{1}{x}=4$ হইলে দেখাও যে $x^2+\frac{1}{x^2}=18$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2x.\frac{1}{x}$$
$$=(4)^2+2=16+2=18.$$

উদাহরণ 10. $m-\frac{1}{m}=n$ হইলে দেখাও যে $m^4+\frac{1}{m^4}$

$$=n^4+4n^2+2$$

$$m^4+\frac{1}{m^4}=(m^2)^2+\left(\frac{1}{m^2}\right)^2=\left(m^2+\frac{1}{m^2}\right)^2-2m^2\times\frac{1}{m^2}$$

$$=\left\{\left(m-\frac{1}{m}\right)^2+2m\times\frac{1}{m}\right\}^2-2$$

$$=(n^2+2)^2-2=n^4+4n^2+4-2=n^4+4n^2+2$$

প্রশ্নমালা 16

সূত্র সাহায্যে বর্গ নির্ণয় কর :

1. $2a-b$; $2m-3n$; $p-2q$; $2b-\frac{1}{2}c$; $2y-\frac{1}{4}z$
2. $ab-cd$; $ax-by$; $pq-qr$; $2xy-3yz$; $4mn-3pq$
3. $2x^2-3y^2$; $2p^2-3q$; m^3-n^3 ; $a^2b^2-b^2c^2$; $\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{4}b^4$
4. $x-\frac{1}{x}$; $2m-\frac{1}{2m}$; $3p-\frac{3}{p}$; $a^2-\frac{1}{a^2}$; $3a^3-\frac{1}{3a^3}$
5. $(30-1)$; $(50-3)$; $(100-2)$; 198 ; 999
6. $ab+bc-ca$; $xy-yz-zx$; $2pq-3qr-4rp$
7. $a+b-c-d$; $a-b+x-y$; $m-n-p+q$

সরল কর :

8. $(3a+2)^2-2(3a+2)(3a-2)+(3a-2)^2$
9. $(4m+3n)^2-2(4m+3n)(m+3n)+(m+3n)^2$
10. $(2ax+3by-4cz)^2-2(2ax+3by-4cz)(2ax-3by-4cz)$ $+(2ax-3by-4cz)^2$
11. $(x-y+a-b)^2-2(x-y+a-b)(x-y-a+b)+(x-y-a+b)^2$
12. $98765\times98765-2\times98765\times98764+98764\times98764$
13. $5{\cdot}4321\times5{\cdot}4321-2\times5{\cdot}4321\times4{\cdot}9321+4{\cdot}9321\times4{\cdot}9321$

মান নির্ণয় কর :

14. $25x^2-10x+1$, যখন $x=\frac{1}{5}$

15. $a^2b^2-2ab^2c+b^2c^2$, যখন $a=4,\ b=3,\ c=2$

16. $4(x+y)^2-20(x+y)+25$, যখন $x=2, y=1$

17. $9(2x+3y)^2-24(2x+3y)(2y+3z)+16(2y+3z)^2$, যখন $x=4$, $y=3, z=2$

18. $a-\frac{1}{a}=2$ হইলে দেখাও যে (i) $a^2+\frac{1}{a^2}=6$ (ii) $a^4+\frac{1}{a^4}=34$

(iii) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=8$

19. $a-b=3$ এবং $ab=4$ হইলে দেখাও যে (i) $a^2+b^2=17$
(ii) $a+b=5$

20. $x-y=10$ এবং $xy=16$ হইলে (i) x^2+y^2 এবং (ii) $(x+y)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

21. $x+y=12$ এবং $x-y=2$ হইলে দেখাও যে $2(x^2+y^2)=148$ এবং $4xy=140$

22. $x+y=7$ এবং $x-y=3$ হইলে $8xy(x^2+y^2)$-এর মান নির্ণয় কর।

78. তৃতীয় সূত্র : $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

অর্থাৎ দুইটি রাশির যোগফলকে উহাদের বিয়োগফলের দ্বারা গুণ করিলে ঐ গুণফল রাশি দুইটির বর্গের বিয়োগফলের সমান হয়।

প্রমাণ। $(a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b)$

$=a^2-ab+ab-b^2$

$=a^2-b^2$

বিপরীতভাবে প্রকাশ করিলে $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

অর্থাৎ, $(a+b)$ এবং $(a-b)$ প্রত্যেকেই a^2-b^2-এর উৎপাদক।

অতএব যে কোন রাশিকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিতে

পারিলে এই সূত্রের সাহায্যে আমরা ঐ রাশিটিকে দুইটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে পারি।

অনুসিদ্ধান্ত। $xy=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$

তৃতীয় সূত্রটিতে $a+b$ স্থলে x এবং $(a-b)$ স্থলে y লিখিলে

$$\frac{x+y}{2}=\frac{(a+b)+(a-b)}{2}=\frac{2a}{2}=a$$

এবং $$\frac{x-y}{2}=\frac{(a+b)-(a-b)}{2}=\frac{2b}{2}=b$$

যেহেতু, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

অতএব $xy=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$

প্রথম ও দ্বিতীয় সূত্রটি হইতেও আমরা উপরিউক্ত অনুসিদ্ধান্তটিতে উপনীত হইতে পারি।

আমরা জানি, $x^2+y^2+2xy=(x+y)^2\cdots\cdots(1)$

$$x^2+y^2-2xy=(x-y)^2\cdots\cdots(2)$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিলে, $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$

$$\therefore \quad xy=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}$$

$$=\frac{(x+y)^2}{4}-\frac{(x-y)^2}{4}$$

$$=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

এই অনুসিদ্ধান্তের সাহায্যে যে কোনও দুইটি রাশির গুণফলকে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণ 1. $2a+3b$কে $2a-3b$ দ্বারা গুণ কর।

$$(2a+3b)(2a-3b)=(2a)^2-(3b)^2=4a^2-9b^2$$

উদাহরণ 2. $x+y-z$ কে $x-y+z$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{aligned}(x+y-z)(x-y+z)&=\{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}\\&=(x)^2-(y-z)^2\\&=x^2-(y^2-2yz+z^2)\\&=x^2-y^2+2yz-z^2\end{aligned}$$

উদাহরণ 3. a^2+ab+b^2কে a^2-ab+b^2 দ্বার গুণ কর।

$$\begin{aligned}&(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)\\&=\{(a^2+b^2)+ab\}\{(a^2+b^2)-ab\}\\&=(a^2+b^2)^2-(ab)^2=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2\\&=a^4+a^2b^2+b^4\end{aligned}$$

উদাহরণ 4. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$-এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}&(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)\\&=\{(x^2+1)+x\}\{(x^2+1)-x\}(x^4-x^2+1)\\&=\{(x^2+1)^2-(x)^2\}(x^4-x^2+1)\\&=(x^4+x^2+1)(x^2-x^2+1)\\&=\{(x^4+1)+x^2\}\{(x^4+1)-x^2\}\\&=(x^4+1)^2-(x^2)^2=x^8+2x^4+1-x^4\\&x^8+x^4+1\end{aligned}$$

উদাহরণ 5. সরল কর : $(a+b-c)^2-(a-b+c)^2$

$$\begin{aligned}&(a+b-c)^2-(a-b+c)^2\\&=\{(a+b-c)+(a-b+c)\}\{(a+b-c)-(a-b+c)\}\\&=(a+b-c+a-b+c)(a+b-c-a+b-c)\\&=2a(2b-2c)=4ab-4ac=4a(b-c)\end{aligned}$$

উদাহরণ 6. $a^4 - 81b^4$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$a^4 - 81b^4 = (a^2)^2 - (9b^2)^2 = (a^2 + 9b^2)(a^2 - 9b^2)$$
$$= (a^2 + 9b^2)\{(a)^2 - (3b^2)\} = (a^2 + 9b^2)(a + 3b)(a - 3b)$$

উদাহরণ 7. $x^2 - y^2 + 2yz - z^2$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$x^2 - y^2 + 2yz - z^2 = x^2 - (y^2 - 2yz + z^2)$$
$$= x^2 - (y - z)^2 = \{x + (y - z)\}\{x - (y - z)\}$$
$$= (x + y - z)(x - y + z)$$

উদাহরণ 8. সরল কর : $397 \times 397 - 395 \times 395$

$$397 \times 397 - 395 \times 395 = (397)^2 - (395)^2$$
$$= (397 + 395)(397 - 395)$$
$$= 792 \times 2 = 1584$$

উদাহরণ 9. সরল কর : 1209×1191

$$1209 \times 1191 = (1200 + 9)(1200 - 9)$$
$$= (1200)^2 - (9)^2$$
$$1440000 - 81 = 1439919$$

উদাহরণ 10. $(3x + 2y)(x + 4y)$-কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

$$(3x + 2y)(x + 4y) = \left\{\frac{(3x + 2y) + (x + 4y)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(3x + 2y) - (x + 4y)}{2}\right\}^2$$
$$= (2x + 3y)^2 - (x - y)^2$$

প্রশ্নমালা 17

সূত্রের সাহায্যে গুণফল নির্ণয় কর :

1. $(2x+3y)(2x-3y)$; $(3x+4)(3x-4)$
2. $(5x+2a)(5x-2a)$; $(3m+4n)(3m-4n)$
3. $(ax+by)(ax-by)$; $(xy+yz)(xy-yz)$
4. $(2ab+3bc)(2ab-3bc)$; $(a^2+b^2)(a^2-b^2)$
5. $(2p+\frac{1}{2}q)(2p-\frac{1}{2}q)$; $(x+\frac{2}{3}y)(x-\frac{2}{3}y)$
6. $(a^x+b^y)(a^x-b^y)$; $(1+x^a y^a)(1-x^a y^a)$
7. $(x+y+z)(x+y-z)$; $(a+b+c)(a-b-c)$
8. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$; $(xy+yz+zx)(xy-yz+zx)$
9. $(a^4b^4+a^2b^2+1)(a^4b^4-a^2b^2+1)$
10. $(x^2+\sqrt{2}xy+y^2)(x^2-\sqrt{2}xy+y^2)$

ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর :

11. $(a+1)(a-1)(a^2+1)(a^4+1)$
12. $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$
13. $(2p+3q)(2p-3q)(4p^2+9q^2)$
14. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$
15. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$
16. $(a^2+\sqrt{2}ab+b^2)(a^2-\sqrt{2}ab+b^2)(a^4-b^4)$

মান নির্ণয় কর :

17. $175\times175-173\times173$
18. $(7569)^2-(7469)^2$
19. $(674{\cdot}67)^2-(325{\cdot}33)^2$
20. 706×694
21. $\dfrac{5712\times5712-5698\times5698}{(5712+5698)}$
22. $\dfrac{{\cdot}875\times{\cdot}875-{\cdot}125\times{\cdot}125}{{\cdot}875-{\cdot}125}$

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

23. $4x^2-9y^2$ 24. $16y^2-25z^2$

25. $9a^2-36b^2$ 26. $49b^2-81c^2$

27. $36a^2-121$ 28. $64-25x^2$

29. $16x^4-81$ 30. $a^2b^2-c^2d^2$

31. x^4-625y^4 32. $81a^4-256b^4$

দুইটি রাশির অন্তররূপে প্রকাশ কর।

33. $(3a+b)(a-b)$ 34. $(5p+3q)(3p+q)$

35. $(2x+3y)(x+2y)$

সহজ উৎপাদক

79. কোনও রাশি দুই বা ততোধিক রাশির গুণফলের সমান হইলে শেষোক্ত রাশির প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত রাশির গুণনীয়ক বা উৎপাদক বলে।

$3abc=3\times a\times b\times c$; সুতরাং 3, a, b ও c প্রত্যেকে $3abc$-এর উৎপাদক।

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$; $\therefore$ $(a+b)$ ও $(a-b)$ প্রত্যেকে a^2-b^2-এর উৎপাদক।

80. পর্যবেক্ষণ দ্বারা উৎপাদক নির্ণয়।

দ্বিপদ, ত্রিপদ বা বহুপদ রাশিমালার প্রত্যেকটি পদে একই সাধারণ উৎপাদক থাকিলে উহা সমস্ত রাশিমালাটির একটি উৎপাদক হইবে।

$ax+bx-cx+dx$ রাশিমালার সাধারণ উৎপাদক x ; কারণ একমাত্র x-ই রাশিমালার প্রত্যেকটি পদে গুণনীয়ক রূপে বর্তমান আছে।

কোনও রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইলে সাধারণ উৎপাদকটি বাহির করিয়া লইয়া উহা দ্বারা রাশিমালার প্রত্যেক পদকে

ভাগ করিয়া সেই ভাগফলগুলিকে স্ব স্ব চিহ্নসহ একটি বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন করিতে হয়। উৎপাদকটি বন্ধনীর বাহিরে থাকে।

উদাহরণ 1. $ab+bc+cd$-এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালার তিনটি পদের একমাত্র bই সাধারণ উৎপাদক।

$\therefore$ $ab+bc+cd=b(a+c+d)$; b এবং $(a+c+d)$ রাশিমালাটির দুইটি উৎপাদক।

উদাহরণ 2. $3a^2b-6ab^2+9abc$-এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

3, 6 ও 9-এর সাধারণ উৎপাদক 3 ; a^2b, ab^2 ও abc-এর সাধারণ উৎপাদক ab এবং $3a^2b \div 3ab=+a$, $-6ab^2 \div 3ab=-2b$,

$$9abc \div 3ab=+3c$$

$\therefore$ $3a^2-6ab^2+9abc=3ab(a-2b+3c)$

উদাহরণ 3. $a(x+y+z)+b(x+y+z)+c(x+y+z)$-এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

এক্ষেত্রে $(x+y+z)$, প্রদত্ত রাশিমালার সাধারণ উৎপাদক।

$$\therefore \quad a(z+y+z)+b(x+y+z)+c(x+y+z)$$
$$=(x+y+z)(a+b+c)$$

উদাহরণ 4. $ap+bp+cp+aq+bq+cq+ar+br+cr$-এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$ap+bp+cp+aq+bq+cq+ar+br+cr$$
$$=p(a+b+c)+q(a+b+c)+r(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)(p+q+r)$$

উদাহরণ 5. $a(x+y-z)+a(x-y+z)+a(x+y-z)$-এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$a(x+y-z)+a(x-y+z)+a(x+y-z)$$
$$=a(x+y-z+x-y+z+x+y-z)=a(3x+y-z)$$

উদাহরণ 6. $3a^3-3a^2-a+1$-এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$3a^3-3a^2-a+1=3a^2(a-1)-(a-1)$$
$$=(a-1)(3a^2-1)$$
$$[\because \quad -(a-1)=-1\times(a-1)]$$

প্রশ্নমালা 18

উৎপাদক নির্ণয় কর :—

1. $4x+8$
2. $ab-bc$
3. a^2b+ab^2
4. $6mnp-9mnq$
5. $x^3y^2-x^2y^3$
6. $3a^3-15a^2b$
7. $2x^2a-3x^2b+4x^2c$
8. $x^2yz+xy^2z+xyz^2$
9. $2m^3n^2-4m^2n^2+6m^2n^3$
10. $x(a+b)+y(a+b)+z(a+b)$
11. $a(x-y)-b(x-y)$
12. $a(x+y)+a(z-y)$
13. $2a(x-y)^2+3b(x-y)^2-c(x-y)^2$
14. $(ax+by+cz)(b+c-a)+(ax+by+cz)(b-c+a)+(ax+by+cz)(a-b+c)$
15. $mx+nx+my+ny$
16. $xy+x+y+1$
17. $ax-bx-cx+ay-by-cy$
18. $a^4+a^3+a^2+a$
19. $x^2-xy-xz+yz$
20. $am^3-am^2-m+1.$

81. সূত্রের সাহায্যে উৎপাদক নির্ণয়।

পূর্ববর্তী কয়েকটি অনুচ্ছেদে বৈজিক সূত্র ও উহাদের প্রয়োগ সম্পর্কে আলোচনা করা হইয়াছে। নিম্নের উদাহরণগুলিতে ঐ সূত্রগুলির সাহায্যে বীজগণিতীয় রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয়ের প্রণালী প্রদর্শিত হইল।

সূত্র :

(i) $a^2-2ab+b^2=(a+b)^2$ (ii) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$a^2+2ab+b^2$	$a^2-2ab+b^2$
$=(a^2+ab+ab+b^2)$	$=a^2-ab-ab+b^2$
$=a(a+b)+b(a+b)$	$=a(a-b)-b(a-b)$
$=(a+b)(a+b)$	$=(a-b)(a-b)$
$=(a+b)^2$	$=(a-b)^2$

কোনও রাশিমালার পরস্পর সমান দুইটি দ্বিপদ গুণনীয়ক থাকিলে ঐ গুণনীয়ক দুইটি উপরিলিখিত সূত্রদ্বয়ের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1. $9x^2+24xy+16y^2$-এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$9x^2+24xy+16y^2$$
$$=(3x)^2+2(3x)(4y)+(4y)^2=(3x+4y)^2$$

উদাহরণ 2. $4a^4-12a^3b^2+9b^4$-এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$4a^4-12a^2b^2+9b^4$$
$$=(2a^2)^2-2(2a^2)(3b^2)+(3b^2)^2$$
$$=(2a^2-3b^2)^2$$

উদাহরণ 3. $(x+y)^4-4(xz+yz)^2+4z^4$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$(x+y)^4-4(xz+yz)^2+4z^4$$
$$=\{(x+y)^2\}^2-2(x+y)^2(2z^2)+(2z^2)$$
$$\because\ 4(xz+yz)^2=(2\times2)\{(x+y)z\}^2=2(x+y)^2(2z^2)$$
$$=\{(x+y)^2-(2z^2)\}^2$$
$$=(x^2+2xy+y^2-2z^2)^2$$

প্রশ্নমালা 19

উৎপাদক নির্ণয় কর :—

1. $4a^2+12ab+9b^2$
2. $x^2-24x+144$
3. $1-8a+16a^2$
4. $16x^4-24x^2y^2+9y^4$
5. $9x^2y^2+12xyz+4z^2$
6. $25-40x^2+16x^4$
7. $p^2m^2-2pqmn+q^2n^2$
8. $16a^6+40a^3b^3+25b^6$
9. $(x+y)^2+8(x+y)+16$
10. $(ax+by)^2-2cz(ax+by)+c^2z^2$
11. $9(x-y)^2-12(x-y)z+4z^2$
12. $x^6-4x^4z+4x^2z^2$
13. $9a^6-30a^3b^3+25b^6$
14. $p^4-2p^2mn+m^2n^2$
15. $a^2(x-y)^2-2ab(x^2-y^2)+b^2(x+y)^2$.

32. সূত্র ঃ

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

$$\begin{aligned}a^2-b^2&=a^2+ab-ab-b^2\\&=a(a+b)-b(a+b)\\&=(a+b)(a-b)\end{aligned}$$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ সূত্রটির সাহায্যে গুণনীয়ক নির্ণয়।

উদাহরণ 1. $4a^2-9b^2$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}4a^2-9b^2&=(2a)^2-(3b)^2\\&=(2a+3b)(2a-3b)\end{aligned}$$

উদাহরণ 2. $(a+b)^2-(b-c)^2$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}(a+b)^2-(b-c)^2&=\{(a+b)+(b-c)\}\{(a+b)-(b-c)\}\\&=(a+2b-c)(a+c)\end{aligned}$$

উদাহরণ 3. $1-81x^4$-এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}1-81x^4 &= (1)^2-(9x^2)^2\\ &= (1+9x^2)(1-9x^2)\\ &= (1+9x^2)\{(1)^2-(3x)^2\}\\ &= (1+9x^2)(1+3x)(1-3x)\end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 20

উৎপাদক নির্ণয় কর :—

1. x^2-16y^2
2. $9x^2-25y^2$
3. $144-64a^2$
4. $81x^4-1$
5. x^4-y^4
6. $16x^4-25y^4$
7. $25a^2b^2-36c^2d^2$
8. $25-(a+b+c)^2$
9. $(a-b)^2-(b-c)^2$
10. $(x+y+z)^2-(x-y+z)^2$
11. $(2x-y-z)^2-(x+2y-z)^2$
12. a^2-81a^6
13. $x^2-(2y-3z)^2$
14. $(x^2-xy)^2-(xy-y^2)^2$
15. $4x^3-144xy^2$
16. $9(x+y)^2-16$
17. $(a+b)^2-4(b-c)^2$
18. $36(3x-2y)^2-49(x+3y)^2$
19. $a^2(b-c)^2-b^2(c-d)^2$
20. $49x^6-64x^4$
21. $27a^4-12a^2b^2$
22. $72p^3q^5-98pq$
23. $a^{2n}-b^{2n}$
24. $(a^2-b^2-c^2+d^2)^2-4(ad-bc)^2$
25. $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$.

83. দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া উৎপাদক নির্ণয়।

a^2-b^2 আকারে রূপান্তরিত করিয়া অনেক রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয় করা যায়। নিম্নের উদাহরণগুলি দেখ।

উদাহরণ 1. $4x^4+81$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}4x^4+81&=(2x^2)^2+(9)^2+2(2x^2)(9)-2(2x^2)(9)\\&=(2x^2+9)^2-(6x)^2\\&=(2x^2+9+6x)(2x^2+9-6x)\\&=(2x^2+6x+9)(2x^2-6x+9).\end{aligned}$$

দ্রষ্টব্য। কোনও রাশির সহিত প্রয়োজন মত অপর যে কোনও একটি রাশি একবার যোগ ও একবার বিয়োগ করিলে মূল রাশিটির মান অপরিবর্তিতই থাকে ; কিন্তু এই যোগ ও বিয়োগের ফলে উৎপাদক বিশ্লেষণ সহজতর হয়।

উদাহরণ 2. $x^4+x^2y^2+y^4$-এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}x^4+x^2y^2+y^4&=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2\\&=(x^2+y^2)^2-(xy)^2\\&=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).\end{aligned}$$

উদাহরণ 3. $9x^4-3x^2+1$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}9x^4-3x^2+1&=9x^4+6x^2+1-9x^2\\&=(3x^2)^2+2(3x^2)(1)+(1)^2-(3x)^2\\&=(3x^2+1)^2-(3x)^2\\&=(3x^2+3x+1)(3x^2-3x+1).\end{aligned}$$

উদাহরণ 4. $a^2-2b-1-b^2$এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}a^2-2b-1-b^2&=a^2-(b^2+2b+1)\\&=(a)^2-(b+1)^2\\&=(a+b+1)(a-b-1)\end{aligned}$$

উদাহরণ 5. $a^2+c^2-b^2-d^2-2ac-2bd$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}&a^2+c^2-b^2-d^2-2ac-2bd\\&=(a^2+c^2-2ac)-(b^2+d^2+2bd)\end{aligned}$$

$$=(a-c)^2-(b+d)^2$$
$$=\{(a-c)+(b+d)\}\{(a-c)-(b+d)\}$$
$$=(a+b-c+d)(a-b-c-d)$$

উদাহরণ 6. $25a^2-10a-49b^2-70b-24$ কে উৎপাদককে বিশ্লেষণ কর।

$$25a^2-10a-49b^2-70b-24$$
$$=25a^2-10a+1-49b^2-70b-25$$
$$=(25a^2-10a+1)-(49b^2+70b+25)$$
$$=(5a-1)^2-(7b+5)^2$$
$$=(5a-1+7b+5)(5a-1-7b-5)$$
$$=(5a+7b+4)(5a-7b-6).$$

উদাহরণ 7. $16x^5+4xy^4$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$16x^5+4xy^4=4x(4x^4+y^4)$$
$$=4x(4x^4+4x^2y^2+y^4-4x^2y^2)$$
$$=4x\{(2x^2+y^2)^2-(2xy)^2\}$$
$$=4x(2x^2+2xy+y^2)(2x^2-2xy+y^2)$$

প্রশ্নমালা 21

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :—

1. x^4+x^2+1
2. x^4+4
3. x^4+64
4. $a^4+a^2b^2+b^4$
5. a^4+4b^4
6. $x^4+3x^2y^2+4y^4$
7. $a^2-b^2+2bc-c^2$
8. a^8+a^4+1
9. $2ab-a^2-b^2+c^2$
10. $x^2-1+2a-a^2$

11. $36a^2-61a^2b^2+25b^2$ 12. $4x^4+(5a)^4$

13. $16a^2-8ab+b^2-9c^2$ 14. $a^4-4a^2b^2+4b^4-1$

15. $x^2+2xy-2yz-z^2$ 16. $(a^2-b^2)(x^2-y^2)-4abxy$

17. $2(ab+cd)-a^2-b^2+c^2+d^2$

18. $x^4+2x^3y-2xy^3-y^4$ 19. $3a^4-18a^2b^2+3b^4$

20. $9a^2-4b^2+16c^2-1-4b-24ac.$

অষ্টম অধ্যায়

সমস্যা সমাধানে সমীকরণের প্রয়োগ

84. সমাধানযোগ্য যে কোনও প্রশ্নই সমস্যা (Problem)। সমস্যা নানা প্রকারের হইতে পারে। কোনও সমস্যায় হয়তো একটি ব্যতীত আর সমস্ত রাশিই জ্ঞাত, কেবল একটি মাত্র রাশিই অজ্ঞাত। আবার কোনও কোনও সমস্যায় কয়েকটি রাশি জ্ঞাত এবং কয়েকটি অজ্ঞাত। এইরূপ জ্ঞাত এবং অজ্ঞাত রাশি সম্বলিত কোনও সমস্যা বা প্রশ্নকে প্রতীকের সাহায্যে এক একটি বীজগণিতীয় বাক্যের দ্বারা প্রকাশ করিয়া অতি সহজেই অজ্ঞাত রাশিটির বা রাশিগুলির মান নির্ণয় করা যায়। অজ্ঞাত রাশিগুলির প্রতীক হিসাবে সাধারণতঃ ইংরেজী বর্ণমালার x, y, z অক্ষরগুলি ব্যবহৃত হইয়া থাকে। যে সমস্যায় একটি মাত্র অজ্ঞাতরাশি থাকে সেই স্থলে অজ্ঞাত রাশির প্রতীক হিসাবে কেবলমাত্র x অক্ষরটি ব্যবহৃত হয়।

একটিমাত্র অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট সহজ সমস্যার সমাধানের জন্য উপযুক্ত প্রতীকের দ্বারা বীজগণিতীয় সাঙ্কেতিক বাক্যগঠন ও উহার সমাধান প্রণালী নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ দিয়া দেখান হইল।

উদাহরণ 1. একটি সংখ্যর 3 গুণের সহিত 5 গুণ যোগ করিলে যোগফল 120 হয়। সংখ্যাটি কত ?

এখন নির্ণেয় অজ্ঞাত রাশিটিকে তুমি যদি x ধর তবে প্রশ্নে আরোপিত সর্তানুযায়ী x এর 3 গুণের সহিত অর্থাৎ $3x$ এর সহিত xএর 5 গুণ অর্থাৎ $5x$ যোগ করিলে যোগফল 120 হইবে।

সুতরাং $3x+5x=120$ লিখিলেই উপরি উক্ত কথাগুলির দ্বারা একটি বীজগণিতীয় বাক্য গঠন করা হইল। অতঃপর উহা হইতে x এর মান নির্ণয় করিলে নির্ণেয় সংখ্যাটি পাওয়া যাইবে।

বীজগণিতীয় প্রক্রিয়া অনুসারে, সমস্যার সমাধান করিতে হইলে কিভাবে অগ্রসর হইতে হয় দেখ।

সমাধান। $3x+5x=120$

বা, $8x=120$

বা, $\frac{8x}{8}=\frac{120}{8}$ [সমতা চিহ্নের উভয় পার্শ্বস্থ রাশি

$\therefore \quad x=15$ দুইটিকে 8 দ্বারা ভাগ করিয়া]

অতএব নির্ণেয় সংখ্যাটি 15.

উদাহরণ 2. কোন্ সংখ্যার 25 গুণের সহিত 25 যোগ করিলে যোগফল 150 হয় ?

মনে কর অজ্ঞাত রাশিটিকে তুমি x ধরিলে $1x$ এর 25 গুণ করিলে হয় $25x$; এই গুণফলের সহিত আরও 25 যোগ করিলে হইবে $25x+25$. সর্তানুযায়ী এই যোগফল 150 এর সমান। সুতরাং এস্থলে $25x+25=150$ লিখিলেই প্রয়োজনীয় বীজগণিতীয় বাক্যটি গঠিত হইল। এখন অজ্ঞাত রাশি x এর মান নির্ণয় করিলেই সমস্যার সমাধান হইবে।

সমাধান। $25x+25=150$

বা, $25x+25-25=150-25$ [সমতা চিহ্নের উভয় পার্শ্বস্থ রাশি হইতে 25 বিয়োগ করিয়া]

বা, $25x=125$

বা, $\frac{25x}{25}=\frac{125}{25}$ [সমতা চিহ্নের উভয় পার্শ্বস্থ রাশি দুইটিকে 25 দ্বারা ভাগ করিয়া]

$\therefore \quad x=5$

অতএব নির্ণেয় সংখ্যাটি 5.

উদাহরণ 3. কমল ও কল্যাণের বয়সের সমষ্টি 40 বৎসর। 10 বৎসর পরে কমলের বয়স কল্যাণের বয়সের দ্বিগুণ হইবে। কমল ও কল্যাণের বর্তমান বয়স কত নির্ণয় কর।

কমলের বর্তমান বয়স x বৎসর ধরিলে কল্যাণের বয়স $(40-x)$ বৎসর ধরিতে হয় কারণ উভয়ের বয়সের সমষ্টি 40 বৎসর। এখন, 10 বৎসর পরে কমল ও কল্যাণ উভয়ের বয়সই 10 বৎসর বৃদ্ধি পাইবে। সুতরাং তখন তাহাদের বয়স হইবে যথাক্রমে $(x+10)$ বৎসর ও $\{(40-x)+10\}$ বৎসর। প্রশ্নানুসারে তখন কমলের বয়স কল্যাণের বয়সের দ্বিগুণ হইবে।

অতএব $x+10=2\{(40-x)+10\}$ লিখিলে প্রশ্নটিতে যে তথ্য দেওয়া আছে তাহা বীজগণিতীয় বাক্যের দ্বারা প্রকাশ করা হইল। অতঃপর x এর মান নির্ণয় করিলেই কমল ও কল্যাণের বর্তমান বয়স নির্ধারণ করা সম্ভব হইবে।

সমাধান। $x+10=2\{(40-x)+10\}$

বা, $x+10=2(50-x)$ [সমতাচিহ্নের ডানদিকের রাশিটিকে সরল করিয়া]

বা, $x+10=100-2x$

বা, $x+10+2x=100-2x+2x$

[সমতাচিহ্নের উভয় পার্শ্বস্থ রাশির সহিত $2x$ যোগ করিয়া]

বা, $3x+10=100$

বা, $3x+10-10=100-10$ [সমতাচিহ্নের উভয় পার্শ্বস্থ রাশি হইতে 10 বিয়োগ করিয়া]

বা, $3x=90$

বা, $\frac{3x}{3}=\frac{90}{3}$ [সমতাচিহ্নের উভয় পার্শ্বস্থ রাশিকে 3 দ্বারা ভাগ করিয়া]

$\therefore\ x=30$

অতএব কমলের বর্তমান বয়স 30 বৎসর এবং কল্যাণের বর্তমান বয়স (40 – 30) বৎসর বা 10 বৎসর।

85. উপরের উদাহরণগুলিতে যে বীজগণিতীয় বাক্যগুলি রচনা করা হইয়াছে তাহাকেই বীজগণিতে সমীকরণ বলে। লক্ষ্য করিবে ঐ উদাহরণগুলির প্রত্যেকটিতেই প্রতীকের দ্বারা প্রকাশিত দুইটি রাশি একটি সমতা চিহ্নের দ্বারা যুক্ত হইয়াছে। সমতা চিহ্নের দ্বারা সংযুক্ত দুইটি বীজগণিতীয় রাশির সাধারণ নাম সমীকরণ (Equation)। সমীকরণের উভয় পার্শ্বস্থিত রাশি দুইটিকে সমীকরণের পার্শ্ব (Side) বা পক্ষ বলা হয়। উক্ত চিহ্নের বামপার্শ্বের রাশিটিকে বামপক্ষ (Left hand side) এবং ডানপার্শ্বের রাশিটিকে দক্ষিণ পক্ষ (Right hand side) বলে।

86. একটি সমীকরণের উভয় পক্ষের সমতা যদি রাশি দুইটিতে ব্যবহৃত অক্ষরগুলির মানের উপর নির্ভরশীল না হয় অর্থাৎ, অক্ষরগুলির মান যাহাই হউক না কেন, কোন সমীকরণের বামপক্ষ সর্বদাই যদি ডানপক্ষের সমান হয় তবে সেই সমীকরণকে অভেদ সমীকরণ বা সংক্ষেপে অভেদ (Identity) বলে। যেমন, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ প্রভৃতি সূত্রগুলির প্রত্যেকটি একটি অভেদ, কারণ a ও b-এর যে কোনও মানেই সাম্য চিহ্নের এক পার্শ্বস্থ রাশির সহিত অপর পার্শ্বস্থ রাশির সমতা অক্ষুণ্ণ থাকে।

ইহার হেতু এই যে অভেদে সাম্যচিহ্নের ডানদিক প্রকৃতপক্ষে বামদিকেরই রূপান্তর মাত্র।

87. যে সমীকরণে সংশ্লিষ্ট অক্ষরগুলির বিশেষ বিশেষ মানের জন্যই উভয় পক্ষের সমতা বজায় থাকে তাহাকে সাপেক্ষ সমীকরণ (Conditional equation) বা সংক্ষেপে সমীকরণ (Equation) বলে। $5x+3=13$ একটি সাপেক্ষ সমীকরণ, কারণ x-এর 2 ভিন্ন অন্য কোনও মানেই $5x+3$, 13-এর সমান হয় না।

88. সমীকরণে ব্যবহৃত যে অক্ষরটির মান অনির্দিষ্ট তাহাকে অজ্ঞাত রাশি (Unknown quantity) বলে। অজ্ঞাত রাশি ভিন্ন সমীকরণস্থিত অন্যান্য রাশিসমূহ জ্ঞাত বা ধ্রুবক রাশি। সাধারণতঃ x, y, z দ্বারা অজ্ঞাত রাশি এবং a, b, c ইত্যাদি ও পাটীগণিতের সংখ্যা দ্বারা জ্ঞাত রাশি সূচিত করা হয়।

89. সমীকরণস্থিত অজ্ঞাত রাশিটির যে নির্দিষ্ট মানের দ্বারা সমীকরণের উভয় পক্ষের সমতা রক্ষিত হয় সেই মানকে সমীকরণের বীজ (Root) বলে। বস্তুতপক্ষে সমীকরণের বীজটিকে সমীকরণে উহার অজ্ঞাত রাশিটির পরিবর্তে বসাইলে দেখা যায় সমীকরণের উভয় পক্ষ একই সংখ্যায় পরিণত হইল। 84 অনুচ্ছেদের প্রথম উদাহরণটিতে অজ্ঞাত রাশি x-এর প্রাপ্ত মান 15 বসাইলে উভয়পক্ষই 120-তে পরিণত হয়। দ্বিতীয় ও তৃতীয় উদাহরণ দুইটিতেও x-এর প্রাপ্ত মান যথাক্রমে 5 ও 30 বসাইলে দেখা যায় যে সমীকরণের উভয় পক্ষের সাংখ্যমান সমান হইল।

অজ্ঞাত রাশির যে মানটি বা মানগুলির দ্বারা সমীকরণের উভয় পক্ষের সমতা সাধিত হয় সেই মানটি বা মানগুলির দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ (Satisfied) হইয়াছে এইরূপ বলা হয়।

কোনও সমীকরণ সমাধান করিতে বলিলে উহার বীজ নির্ণয় করিতে বলা হইয়াছে বুঝিতে হইবে।

90. অজ্ঞাত রাশির সংখ্যা ও ঘাত-ভেদে সমীকরণ অনেক প্রকারের হয়। যে সমীকরণে প্রথম ঘাতযুক্ত একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে তাহাকে সরল সমীকরণ (Simple equation) বলে। ইহাকে প্রথম মানের সমীকরণ (Equation of First Degree) ও বলা হয়।

$2x+15=5$ একটি সরল সমীকরণ কারণ, ইহার মধ্যে মাত্র একটি অজ্ঞাত রাশি x আছে এবং উহা প্রথম ঘাতযুক্ত।

$x^2=5x-6$ সরল সমীকরণ নহে। ইহা একটি দ্বিতীয় মানের সমীকরণ। ইহাকে দ্বিঘাত সমীকরণ বলা হয়।

91. সরল সমীকরণের বিভিন্ন আকার।

সরল সমীকরণ সাধারণতঃ তিন আকারের হইয়া থাকে।

1. সরল সমীকরণের সরলতম আকার $ax=b$; এই শ্রেণীর সমীকরণে, একপক্ষে থাকে যে কোনও সহগযুক্ত অজ্ঞাত রাশিটি এবং অপরপক্ষে থাকে কেবলমাত্র একটি জ্ঞাত রাশি। যেমন, $3x=9$.

2. সরল সমীকরণের অন্য একটি আকার $ax+b=c$; এইরূপ সমীকরণে এক পার্শ্বে থাকে অজ্ঞাত রাশিটির যে কোনও গুণিতক ও একটি জ্ঞাত রাশি এবং অপর পার্শ্বে থাকে কেবলমাত্র একটি জ্ঞাত রাশি। যেমন $5x+13=18$.

3. পূর্বোক্ত দুইপ্রকারের সরল সমীকরণ ব্যতীত তৃতীয় আরও এক আকারের সমীকরণ দেখিতে পাওয়া যায়। ইহার সাধারণ রূপ $ax+b=cx+d$.;

এই শ্রেণীর সমীকরণে উভয় পক্ষেই জ্ঞাত এবং অজ্ঞাত রাশি বর্তমান থাকে যেমন, $12x-10=9x+2$.

92. কোনও সরল সমীকরণ সমাধান করিতে হইলে বিভিন্ন স্থলে বিভিন্ন প্রক্রিয়ায় উহার উভয় পক্ষের সরলতা সম্পাদন করিতে হয় এবং

জ্ঞাত ও অজ্ঞাত রাশিগুলিকে পৃথক করিতে হয় অর্থাৎ, সমতা চিহ্নের বামদিকে অজ্ঞাত রাশিগুলিকে এবং ডানদিকে জ্ঞাত রাশিগুলিকে স্থানান্তরিত করিতে হয়। এই উভয় কার্যের দ্বারা সমীকরণটির রূপ ক্রমশঃ পরিবর্তিত করিয়া আনিয়া উহাকে “অজ্ঞাত রাশি x = কোনও জ্ঞাত রাশি” এইরূপ আকারে পরিণত করিতে হয়। গণিতের কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধ প্রয়োগ করিয়া এই দুইটি কাজ সম্পন্ন করা হয় বলিয়া ঐ স্বতঃসিদ্ধগুলি Axiom) নিম্নে দেওয়া হইল।

93. স্বতঃসিদ্ধ।

1. সমান সমান রাশির সহিত সমান সমান বা একই রাশি যোগ করিলে যোগফলগুলি পরস্পর সমান হয় এবং বিয়োগ করিলে বিয়োগফলগুলি পরস্পর সমান হয়।

সমীকরণ সমাধানের পক্ষান্তর প্রক্রিয়া (Principle of Transposition) এই স্বতঃসিদ্ধের উপর প্রতিষ্ঠিত।

2. সমান সমান রাশিকে সমান সমান বা একই রাশিদ্বারা (শূন্য ব্যতীত) গুণ করিলে গুণফলগুলি পরস্পর সমান হয় এবং ভাগ করিলে ভাগফলগুলিও পরস্পর সমান হয়।

সমীকরণ সমাধানের সরলীকরণ প্রক্রিয়া (Principle of Simplification) এই স্বতঃসিদ্ধের উপর প্রতিষ্ঠিত।

উল্লিখিত স্বতঃসিদ্ধ দুইটির যে কোন একটির বা উভয়ের প্রয়োগ দ্বারা যে কোন সরল সমীকরণ সমাধান করা যায়।

94. পক্ষান্তরকরণ প্রক্রিয়া (Transposition):

1, 2 ও 3নং উদাহরণে উভয় পক্ষকে তুল্য রাশির দ্বারা গুণ বা ভাগ করিয়া সমীকরণটির সরলতা সম্পাদিত হইয়াছে এবং উভয়পক্ষে তুল্য

রাশি যোগ বা বিয়োগ করিয়া জ্ঞাত এবং অজ্ঞাত রাশিগুলিকে পৃথক করা হইয়াছে। সমীকরণের উভয়পক্ষে একই রাশি যোগ বা বিয়োগের পরিবর্তে চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া সমীকরণস্থিত বামপক্ষের কোন পদকে দক্ষিণপক্ষে এবং দক্ষিণপক্ষের কোনও পদকে বামপক্ষে আনিলে জ্ঞাত ও অজ্ঞাত রাশির পৃথকীকরণের কাজ আরও সহজে সম্পন্ন হয়।

উদাহরণ 4. সমাধান কর : $7x-15=6$

$7x-15=6$

বা, $7x-15+15=6+15$

বা, $7x=6+15$

বা, $7x=21$

বা, $\frac{7x}{7}=\frac{21}{7}$

$\therefore \quad x=3.$

উদাহরণ 5. সমাধান কর : $12x=5x+14$

$12x=5x+14$

বা, $12x-5x=5x+14-5x$

বা, $12x-5x=14$

বা, $7x=14$

বা, $\frac{7x}{7}=\frac{14}{7}$

$\therefore \quad x=2.$

উপরের 4নং উদাহরণে উভয় পক্ষে 15 যোগ না করিয়া কেবলমাত্র চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া 15-কে বামদিক হইতে ডানদিকে স্থানান্তরিত করিলেই সমতা চিহ্নের উভয় পার্শ্বস্থ পরবর্তী ধাপের রাশি দুইটি পাওয়া যাইত।

অনুরূপে, 5নং উদাহরণে উভয় পক্ষ হইতে $5x$ বিয়োগ না করিয়া কেবলমাত্র $+5x$-এর চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া উহাকে সমীকরণটির দক্ষিণ পক্ষ হইতে বামপক্ষে আনিলেও পরবর্তী ধাপের $12x-5x=14$ পাওয়া যাইত।

সমীকরণের এক পক্ষস্থিত কোন পদকে চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া অপর পক্ষে স্থানান্তরিত করার নাম পক্ষান্তরকরণ। উহা উভয় পক্ষে একই রাশি যোগ বা উভয় পক্ষ হইতে একই রাশি বিয়োগের সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়া মাত্র।

মন্তব্য। সমীকরণের উভয়পক্ষের রাশি দুইটিকে সমগ্রভাবে পক্ষান্তরিত করিলে চিহ্ন পরিবর্তনের কোনও প্রয়োজন হয় না। যেমন, $5x+4=4x+5$ এই সমীকরণটিকে প্রয়োজনবোধে পক্ষান্তরিত করিয়া $4x+5=5x+4$ লেখা যায়। কারণ, $p=q$ এবং $q=p$ অভিন্ন সম্বন্ধই প্রকাশ করে।

95. সমস্যা সমাধানের জন্য প্রতীক সাহায্যে সাঙ্কেতিক বাক্য গঠন।

সাঙ্কেতিক বাক্য গঠনই সমস্যা সমাধানের মুখ্য অংশ। বিশেষ বিশেষ সর্ত হইতে উপযুক্ত সাঙ্কেতিক বাক্য গঠন প্রথম শিক্ষার্থীদের পক্ষে জটিল মনে হইতে পারে বিবেচনায় নিম্নে উহার কতিপয় উদাহরণ দেওয়া হইল।

উদাহরণ 1. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 72 এবং অন্তর 18 হইলে সংখ্যা দুইটি কি কি হইবে?

মনে কর সংখ্যা দুইটির মধ্যে বৃহত্তরটি x; এখন যেহেতু সংখ্যা দুইটির সমষ্টি 72; একটি সংখ্যা x হইলে অপর সংখ্যাটি হইবে $72-x$. প্রশ্নানুসারে সংখ্যা দুইটির অন্তর 18

অতএব, প্রশ্নের জ্ঞাত ও অজ্ঞাত রাশির সম্বন্ধসূচক সাঙ্কেতিক বাক্যটি হইবে, $x-(72-x)=18$.

উদাহরণ 2. বিনয় ও বাদলের মধ্যে 65 টাকা এরূপ ভাবে ভাগ করিয়া দাও যে বিনয়ের অংশের 5 গুণ বাদলের অংশের 6 গুণ অপেক্ষা যেন 5 টাকা কম হয়।

মনে কর বিনয়কে x টাকা দেওয়া হইল; সুতরাং বাদল পাইল $65-x$ টাকা।

অতএব বিনয়ের টাকার 5 গুণ $=5x$ টাকা এবং বাদলের টাকার 6 গুণ $=(65-x)\times 6$ টাকা বা $(390-6x)$ টাকা।

প্রশ্নানুসারে, বিনয়ের টাকা বাদলের টাকা হইতে 5 টাকা কম। অর্থাৎ, বিনয়ের টাকার সহিত আরও 5 টাকা যোগ করিলে বাদলের টাকার সমান হয়।

সুতরাং, সাঙ্কেতিক বাক্যটি হইবে $5x+5=390-6x$

উদাহরণ 3. এক ব্যক্তি 980 টাকায় পাঁচটি ঘড়ি ও তিনটি কলম ক্রয় করিলেন। যদি একটি ঘড়ির মূল্য একটি কলমের মূল্যের পাঁচগুণ হয় তবে কাহার মূল্য কত ?

মনে কর একটি কলমের মূল্য x টাকা। প্রশ্নানুসারে, একটি ঘড়ির মূল্য হইবে $5x$ টাকা।

এই দরে 3টি কলমের মূল্য হইবে $3x$ টাকা এবং 5টি ঘড়ির মূল্য হইবে $(5x\times 5)$ টাকা $=25x$ টাকা।

ঘড়ি ও কলমের মোট মূল্য $=980$ টাকা।

সুতরাং সাঙ্কেতিক বাক্যটি হইবে $3x+25x=980$

উদাহরণ 4. তিনটি ক্রমিক যুগ্ম সংখ্যার সমষ্টি 78; সংখ্যাগুলি কি কি ?

যে সংখ্যাগুলি দুই-এর দ্বারা বিভাজ্য তাহারাই যুগ্ম সংখ্যা।

সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যাটিকে $2x$ ধরাই বাঞ্ছনীয়।

আবার দুইটি ক্রমিক যুগ্ম সংখ্যার অন্তর 2; সুতরাং ক্ষুদ্রতম যুগ্ম

সংখ্যাটিকে $2x$ ধরিলে তিনটি সংখ্যার পরবর্তী দুইটি হইবে $2x+2$ এবং $2x+4$.

সর্তানুসারে, এই তিনটি সংখ্যার সমষ্টি 78

সুতরাং সাঙ্কেতিক বাক্যটি হইবে $2x+(2x+2)+(2x+4)=78$.

দ্রষ্টব্য। এক্ষেত্রে সমীকরণটি সমাধান করিয়া x-এর মান $2x$, $2x+2$ ও $2x+4$ সংখ্যা তিনটিতে বসাইলে তবেই নির্ণয় সংখ্যা তিনটি পাওয়া যাইবে। যুগ্ম সংখ্যার প্রতীক হিসাবে $2x$ এর পরিবর্তে x ধরিয়া সংখ্যা তিনটিকে x, $x+2$ ও $x+4$ ধরিয়াও অঙ্কটি কষা যায়।

উদাহরণ 5. কমল কাঞ্চন ও কেশবের মধ্যে 135টি আম এইরূপ-ভাবে ভাগ করিয়া দাও যে কাঞ্চন যে কয়টি আম পাইল, কমল যেন তাহার দ্বিগুণ অপেক্ষা 5টি আম বেশী পায় এবং কেশব যে কয়টি আম পাইল কাঞ্চন যেন তাহার তিনগুণ অপেক্ষা 10টি আম বেশী পায়।

মনে কর 135টি আম হইতে কেশবকে x সংখ্যক আম দেওয়া হইল। কাঞ্চনকে তাহার তিনগুণ অপেক্ষা 10টি আম বেশী দিতে হইবে।

সুতরাং কাঞ্চনকে দিতে হইবে $(3x+10)$ সংখ্যক আম।

আবার কাঞ্চন যাহা পাইবে কমল তাহার দ্বিগুণ অপেক্ষা 5টি আম বেশী পাইবে। সুতরাং কমলের প্রাপ্য আমের সংখ্যা $2(3x+10)+5$

মোট আমের সংখ্যা $=135$; এই 135টি আমই তিনজনের মধ্যে নির্দেশানুসারে বণ্টন করিতে হইবে।

সুতরাং সাঙ্কেতিক বাক্যটি হইবে $x+(3x+10)+2(3x+10)+5=135$.

উদাহরণ 6. কমলালেবুর প্রতি ঝুড়ি 10 টাকা দরে ক্রয় করিয়া 10 টাকা 75 পয়সা দরে বিক্রয় করায় এক ব্যক্তির 60 টাকা লাভ হইল। কত ঝুড়ি লেবু ক্রয় ও বিক্রয় করা হইয়াছিল ?

মনে কর ঐ ব্যক্তি x ঝুড়ি কমলা লেবু ক্রয় করিয়া উহা 10 টাকা 75 পয়সা দরে বিক্রয় করিয়াছিলেন।

10 টাকা দরে x ঝুড়ি লেবুর ক্রয়মূল্য $10x$ টাকা

10 টাকা 75 পয়সা দরে অর্থাৎ $10\frac{3}{4}$ টাকা দরে x ঝুড়ি লেবুর বিক্রয় মূল্য $=(10\frac{3}{4}\times x)$ টাকা

$=\frac{43x}{4}$ টাকা

এখন বিক্রয়মূল − ক্রয়মূল্য = লাভ

অতএব $\frac{43x}{4}-10x=60$; ইহাই সমস্যাটির সাংকেতিক বাক্য।

উদাহরণ 7. রেবা, বীথি ও সুপ্রিয়ার মধ্যে 300 টাকা এইরূপভাবে ভাগ করিয়া দাও যে রেবার অংশের এক-তৃতীয়াংশ, বীথির অংশের এক-চতুর্থাংশ ও সুপ্রিয়ার অংশের এক-পঞ্চমাংশ পরস্পর সমান হয়।

মনে কর রেবার অংশের $\frac{1}{3}$ অংশ $=x$ টাকা

তাহা হইলে প্রশ্নানুসারে বীথির অংশের $\frac{1}{4}$ অংশ $=x$ টাকা

এবং সুপ্রিয়ার অংশের $\frac{1}{5}$ অংশ $=x$ টাকা হইবে।

রেবার অংশের $\frac{1}{3}$ অংশ $=x$ টাকা হইলে রেবার প্রাপ্য মোট টাকার পরিমাণ $=3x$ টাকা।

বীথির অংশের $\frac{1}{4}$ অংশ $=x$ টাকা হইলে বীথির প্রাপ্য মোট টাকার পরিমাণ $=4x$ টাকা।

সুপ্রিয়ার অংশের $\frac{1}{5}$ অংশ $=x$ টাকা হইলে সুপ্রিয়ার প্রাপ্য মোট টাকার পরিমাণ $=5x$ টাকা।

মোট টাকার পরিমাণ 300 ; এই টাকাই রেবা, বীথি ও সুপ্রিয়ার মধ্যে তাহাদের অংশানুযায়ী ভাগ করিয়া দিতে হইবে।

সুতরাং সাঙ্কেতিক বাক্যটি হইবে, $3x+4x+5x=300$.

উদাহরণ 8. পিতার বর্তমান বয়স পুত্রের বয়সের তিনগুণ। পুত্রের বর্তমান বয়সের চারিগুণ পিতার 6 বৎসর পূর্বের বয়সের দ্বিগুণ অপেক্ষা 12 বৎসর কম হইলে পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স কত ?

মনে কর পুত্রের বর্তমান বয়স x বৎসর; পিতার বর্তমান বয়স পুত্রের বর্তমান বয়সের তিনগুণ বলিয়া পিতার বর্তমান বয়স $=3x$ বৎসর।

সুতরাং 6 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স ছিল $(3x-6)$ বৎসর; পিতার ঐ সময়ের বয়সের দ্বিগুণ করিলে হয় $2(3x-6)$ বৎসর।

আবার পুত্রের বর্তমান বয়সের চারিগুণ $=4x$ বৎসর।

প্রদত্ত সর্তানুসারে, পুত্রের বর্তমান বয়সের চারিগুণ পিতার 6 বৎসর পূর্বের বয়সের দ্বিগুণ অপেক্ষা 12 বৎসর কম। অতএব পুত্রের বর্তমান বয়সের চারিগুণের সহিত 12 বৎসর যোগ করিলে ঐ যোগফল পিতার 6 বৎসর পুর্বের বয়সের দ্বিগুণের সমান হইবে।

অতএব, সাঙ্কেতিক বাক্যটি হইবে $4x+12=2(3x-6)$

উদাহরণ 9. এক ব্যক্তি 30 জন বালক-বালিকার মধ্যে 50 টাকা এইরূপ ভাবে ভাগ করিয়া দিলেন যে প্রত্যেক বালক 1 টাকা 75 পয়সা এবং প্রত্যেক বালিকা 1 টাকা 50 পয়সা করিয়া পাইল। বালক ও বালিকার সংখ্যা কত ?

মনে কর বালকের সংখ্যা x; যেহেতু বালক-বালিকার মোট সংখ্যা 30, বালকের সংখ্যা x হইলে বালিকার সংখ্যা হইবে $(30-x)$

এখন 1 টা. 75 প. $=1\frac{3}{4}$ টাকা এবং 1 টাকা 50 পয়সা $=1\frac{1}{2}$ টাকা

x জন বালককে $1\frac{3}{4}$ টাকা হারে দিলে ব্যয় হইবে $x\times\frac{7}{4}$ টাকা

$$=\frac{7x}{4} \text{ টাকা।}$$

$(30-x)$ জন বালিকাকে $1\frac{1}{2}$ টাকা হারে দিলে ব্যয় হইবে

$$(30-x)\times 1\tfrac{1}{2} \text{ টাকা} = \frac{(30-x)\times 3}{2} \text{ টাকা।}$$

উভয় টাকার সমষ্টি 50 টাকা

∴ সাঙ্কেতিক বাক্যটি হইবে $\frac{7x}{4}+\frac{(30-x)\times 3}{2}=50.$

উদাহরণ 10. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্কটি দশক স্থানীয় অঙ্কটির তিনগুণ ; ঐ সংখ্যার অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া লিখিলে যে সংখ্যাটি উৎপন্ন হয় তাহা পূর্ব সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 15 বেশী। পূর্ব সংখ্যাটি কত ?

মনে কর দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যাটির দশক স্থানীয় অঙ্কটি x, সুতরাং উহার একক স্থানীয় অঙ্কটি হইবে $3x$।

সুতরাং দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যাটি $10x+3x$; ইহাকে উল্টাইয়া লিখিলে যে সংখ্যাটি হইবে তাহা $10(3x)+x$ বা $30x+x$

প্রশ্নানুসারে এই সংখ্যাটি পূর্বসংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 15 বেশী। অর্থাৎ, পূর্বসংখ্যার দ্বিগুণের সহিত আরও 15 যোগ করিলে পরবর্তী সংখ্যাটি হইবে।

পূর্বসংখ্যার দ্বিগুণ করিলে হয় $(10x+3x)\times 2$; ইহার সহিত 15 যোগ করিলে হয় $2(10x+3x)+15$

∴ সাঙ্কেতিক বাক্যটি হইবে $30x+x=2(10x+3x)+15$

96. প্রশ্নাবলীজাত বিভিন্ন আকারের সমীকরণ ও তাহার সমাধান

সমস্যার সমাধানে $ax=b$ আকারের সমীকরণের প্রয়োগ।

উদাহরণ 1. কোন্ সংখ্যার 5 গুণকে 13 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল 15 হইবে ?

মনে কর নির্ণেয় সংখ্যাটি x ; সুতরাং উহার 5 গুণ $=5x$;

$5x$-কে 13 দ্বারা ভাগ করিলে হয় $\frac{5x}{13}$

সমস্যার সর্তানুসারে, $\frac{5x}{13}=15$ (একটি সমীকরণ গঠিত হইল)

উক্ত সমীকরণটি সমাধান করিয়া x-এর মান নির্ণয় করিলেই প্রদত্ত সমস্যার উত্তর পাওয়া যাইবে।

এখন, $\frac{5x}{13}=15$ বা, $\frac{5x}{13}\times\frac{13}{5}=15\times\frac{13}{5}$

$\therefore \quad x=39.$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি $=39.$

উদাহরণ 2. একখানা মোটরগাড়ী 36000 টাকায় বিক্রয় করায় এক ব্যক্তির ক্রয়মূল্যের $\frac{1}{5}$ অংশ লাভ হইল। গাড়ীখানার ক্রয়মূল্য কত ?

মনে কর গাড়ীখানার ক্রয়মূল্য $=x$ টাকা

সুতরাং সমস্যার সর্তানুসারে, $x+\frac{1}{5}x=36000$

বা, $\frac{5x+x}{5}=36000$

বা, $\frac{6x}{5}=36000$

বা, $\frac{6x}{5}\times\frac{5}{6}=36000\times\frac{5}{6}$

$\therefore \quad x=30000$

$\therefore$ গাড়ীখানার নির্ণেয় ক্রয়মুল্য $=30000$ টাকা

লক্ষ্য করিয়া দেখ উদাহরণ 1 ও উদাহরণ 2 দুইটিতেই $ax=b$ আকারের সমীকরণ গঠিত হইয়াছে।

প্রশ্নমালা 22

বীজগণিতের সমীকরণ সাহায্যে সমাধান কর :

1. কোন্ সংখ্যার 5 গুণকে 13 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল 15 হইবে ?
2. একটি সংখ্যার 7 গুণের সহিত উহার $\frac{1}{7}$ অংশ যোগ করিলে 100 হয় ; সংখ্যাটি কত ?
3. একটি সংখ্যার 10 গুণ হইতে উহার $\frac{1}{10}$ অংশবিয়োগ করিলে 198 হইল। সংখ্যাটি কত ?
4. কোন্ সংখ্যার $\frac{1}{4}$ অংশের সহিত উহার $\frac{3}{8}$ অংশ যোগ করিলে যোগফল 15 হইবে ?
5. কোন্ সংখ্যার $\frac{1}{3}$ অংশ হইতে উহার $\frac{1}{4}$ অংশ বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 6 হইবে ?
6. কোন্ সংখ্যার $\frac{3}{4}$ অংশ উহার $\frac{3}{5}$ অংশ হইতে 9 বেশী ?
7. দুইটি সংখ্যার যোগফল 160 ; একটি অপরটির 3 গুণ হইলে ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি কত ?
8. দুইটি সংখ্যার বিয়োগফল 45 ; একটি অপরটির 4 গুণ হইলে ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি কত ?
9. একটি সংখ্যার 9 গুণ, সংখ্যাটির 7 গুণ অপেক্ষা 10 বেশী ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
10. একটি সংখ্যার 7·4 গুণ হইতে উহার 5·8 গুণ বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 3·2 হয় ; সংখ্যাটি কত ?
11. A, B ও C এর মধ্যে 300 টাকা এইরূপ ভাবে ভাগ করিয়া দাও যে C যত টাকা পাইবে B যেন তাহার দ্বিগুণ এবং A যেন তাহার তিনগুণ টাকা পায়।
12. 2 জন পুরুষ ও 3 জন স্ত্রীলোকের মধ্যে 144 টাকা এইরূপভাবে ভাগ করিয়া দাও যে প্রত্যেক পুরুষ যেন প্রত্যেক স্ত্রীলোকের তিনগুণ টাকা পায়।
13. দুইটি থলিতে মোট 9 টাকা আছে। একটি থলিতে যতগুলি 25 পয়সা

মুদ্রা আছে অপরটিতে তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক 10 পয়সা মুদ্রা আছে। থলি দুইটির কোনটিতে কত আছে নির্ণয় কর।

14. পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 60 বৎসর। পিতার বয়স পুত্রের বয়সের তিনগুণ হইলে প্রত্যেকের বয়স কত ?

15. এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহার $\frac{1}{16}$ অংশ, $\frac{1}{8}$ অংশ ও $\frac{1}{4}$ অংশের সমষ্টি 14-এর সমান।

97. সমস্যার সমাধানে $ax+b=c$ আকারের সমীকরণের প্রয়োগ।

উদাহরণ 3. কোন্ সংখ্যার 21 গুণ হইতে 42 বিয়োগ করিলে বিয়োগ ফল 63 হইবে ?

মনে কর নির্ণেয় সংখ্যাটি x

সুতরাং প্রশ্নের সর্তানুসারে, $21x-42=63$

বা, $21x=63+42$ বা, $x=\frac{105}{21}$

$\therefore \quad x=5$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি 5

উদাহরণ 4. কোন্ সংখ্যার 7 গুণের সহিত 7 যোগ করিলে যোগফল 77 হয় ?

মনে কর নির্ণেয় সংখ্যাটি x

সুতরাং প্রশ্নের সর্তানুসারে, $7x+7=77$

বা, $7x=77-7$ বা, $x=\frac{70}{7}$

$\therefore \quad x=10$

অতএব নির্ণেয় সংখ্যাটি 10

লক্ষ্য করিয়া দেখ উদাহরণ 3 ও 4 দুইটিতেই $ax+b=c$ আকারের সমীকরণ গঠিত হইয়াছে।

প্রশ্নমালা 23

বীজগণিতের সমীকরণ সাহায্যে সমাধান কর :

1. 10 এর সহিত কোনও একটি সংখ্যার $\frac{1}{10}$ অংশ যোগ করিলে যোগফল 15 হইল ; সংখ্যাটি কত ?
2. কোনও একটি সংখ্যার 5 গুণের সহিত $\frac{1}{5}$ যোগ করিয়া যোগফলকে 15 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল 78 হইল ; সংখ্যাটি কত ?
3. কোন্ সংখ্যার $\frac{1}{7}$ অংশ হইতে 12 বিয়োগ করিলে 12 অবশিষ্ট থাকে ?
4. তিনটি ক্রমিক অখণ্ড যুগ্ম সংখ্যার সমষ্টি 48 হইলে সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।
5. পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি 45 বৎসর। তাহাদের বয়সের অন্তর 25 বৎসর। পিতার বর্তমান বয়স কত ?
6. 3 জন পুরুষ, 4 জন স্ত্রীলোক ও 5 জন বালকের মধ্যে 125 টাকা এইরূপ ভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল যে প্রত্যেক পুরুষ যেন প্রত্যেক স্ত্রীলোক স্ত্রীলোক অপেক্ষা 1 টাকা এবং প্রত্যেক স্ত্রীলোক যেন প্রত্যেক বালক অপেক্ষা 2 টাকা অধিক পায়। প্রত্যেকটি পুরুষ কত টাকা করিয়া পাইয়াছিল নির্ণয় কর।
7. কোনও প্রাথমিক বিদ্যালয়ের ছাত্রছাত্রীদের মোট সংখ্যা 200 ; হিসাব করিয়া দেখা গেল প্রত্যেক ছাত্রকে 3টি এবং প্রত্যেক ছাত্রীকে 4টি করিয়া কমলালেবু দিতে হইলে 725টি কমলালেবু ক্রয় করিতে হয়। ঐ বিদ্যালয়ের ছাত্রীসংখ্যা কত নির্ণয় কর।
8. তিনটি ক্রমিক অযুগ্ম সংখ্যার সমষ্টি 105 ; সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।
9. প্রত্যেকটি কাকাতুয়ার মূল্য 25 টাকা এবং ময়নার মূল্য 5 টাকা। এক ব্যক্তি 100 টাকা দিয়া মোট 8টি পাখী ক্রয় করিলেন। তিনি কয়টি কাকাতুয়া এবং কয়টি ময়না ক্রয় করিয়াছিলেন ?
10. পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 85 বৎসর। পিতার 35 বৎসর বয়সে পুত্রের জন্ম হইয়া থাকিলে পুত্রের বর্তমান বয়স কত ?
11. একখানা গাড়ী ও একটি ঘোড়ার মূল্য মোট 550 টাকা। ঘোড়ার মূল্য গাড়ীর মূল্য অপেক্ষা 100 টাকা বেশী হইলে গাড়ীখানার মূল্য কত ?

12. 90 কে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যে এক অংশের 3 গুণ অপর অংশের 5 গুণ অপেক্ষা 46 বেশী হয়।

13. A ও B-এর মধ্যে 125 টাকা এইরূপভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল যে A-র অংশের 5 গুণ যেন B এর অংশের 11 গুণ অপেক্ষা 15 টাকা কম হয়। A কত টাকা পাইয়াছে নির্ণয় কর।

14. 96কে এমন তিন অংশে বিভক্ত কর যে প্রথম অংশ যেন দ্বিতীয় অংশ অপেক্ষা 12 বেশী হয় এবং দ্বিতীয় অংশ যেন তৃতীয় অংশের তিনগুণ হয়।

15. A, B ও C এর মধ্যে 80 টাকা এইরূপ ভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল যে A যেন B-এর অংশের দ্বিগুণ অপেক্ষা 10 টাকা বেশী পায় এবং B যেন C-এর অংশের তিনগুণ অপেক্ষা 10 টাকা কম পায়।

98. সমস্যা সমাধানে $ax+b=cx+d$ আকারের সমীকরণের প্রয়োগ।

উদাহরণ 5. দুইটি সংখ্যার বিয়োগফল 7 ; বড় সংখ্যাটির তিন গুণ, ছোট সংখ্যাটির 5 গুণ অপেক্ষা 3 বেশী ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

মনে কর, ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি x ; বৃহত্তর সংখ্যাটি হইতে ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 7 হয় ;

সুতরাং বৃহত্তর সংখ্যাটি $x+7$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $3(x+7)=5x+3$

বা, $3x+21=5x+3$

বা, $3x-5x=3-21$

বা, $-2x=-18$

বা, $x=\dfrac{-18}{-2}=9$

অতএব নির্ণেয় সংখ্যা দুইটি, $9+7=16$ এবং 9.

উদাহরণ 6 A-র বর্তমান বয়স B-এর বয়সের 5 গুণ ; 5 বৎসর পরে A-র বয়স B-এর বয়সের তিনগুণ হইবে। A ও B-এর বর্তমান বয়স কত ?

মনে কর, B-এর বর্তমান বয়স x বৎসর ; A-র বর্তমান বয়স B-এর বয়সের 5 গুণ বলিয়া A-এর বর্তমান বয়স হইবে $5x$ বৎসর।

5 বৎসর পরে A ও B উভয়ের বয়সই 5 বৎসর বাড়িবে।

সুতরাং তখন তাহাদের বয়স হইবে যথাক্রমে $(5x+5)$ বৎসর ও $(x+5)$ বৎসর।

সুতরাং প্রশ্নের শর্তানুসারে, $5x+5=3(x+5)$

বা, $5x+5=3x+15$

বা, $5x-3x=15-5$

বা, $2x=10$

$\therefore\ x=\frac{10}{2}=5$

$\therefore$ A-এর বর্তমান বয়স (5×5) বৎসর বা 25 বৎসর এবং B-এর বর্তমান বয়স 5 বৎসর।

উদাহরণ 7. প্রথম পাঁচটি ক্রমিক সংখ্যার দ্বিতীয় ও তৃতীয়টির গুণফল প্রথম ও পঞ্চমটির গুণফলের সমান। ক্রমিক সংখ্যাগুলি কি কি ?

মনে কর পাঁচটি ক্রমিক সংখ্যার ক্ষুদ্রতমটি x সুতরাং পরবর্তী সংখ্যাগুলি হইবে $(x+1)$, $(x+2)$, $(x+3)$ ও $(x+4)$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $x(x+4)=(x+1)(x+2)$

বা, $x^2+4x=x^2+3x+2$

বা, $4x-3x=2\quad\therefore\ x=2.$

অতএব ক্রমিক সংখ্যাগুলি 2, 3, 4, 5 ও 6

মন্তব্য। উক্ত উদাহরণটিতে x-এর দ্বিঘাত বিদ্যমান থাকায় সমীকরণটি দ্বিঘাত সমীকরণ এইরূপ মনে হইতে পারে। কিন্তু লক্ষ্য করিবে x-এর বর্গ উভয় পক্ষ হইতে অপসারিত হওয়ায় শেষ পর্যন্ত সমীকরণটি একটি সরল সমীকরণে রূপান্তরিত হইয়াছে।

উদাহরণ 5, 6 এবং 7 লক্ষ্য করিয়া দেখ যে, প্রত্যেক ক্ষেত্রেই যে সমীকরণ গঠিত হইয়াছে তাহার আকার $ax+b=cx+d$.

প্রশ্নমালা 24

বীজগণিতের সমীকরণ সাহায্যে সমাধান কর :

1. কোন্ সংখ্যা হইতে 5 বিয়োগ করিয়া বিয়োগফলকে 2 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল ঐ সংখ্যাটি অপেক্ষা 10 বেশী হয় ?

2. 96 হইতে কোনও একটি সংখ্যার 13 গুণ বিয়োগ করিয়া দেখা গেল বিয়োগফল উক্ত সংখ্যার 20 গুণ অপেক্ষা 3 কম হয় ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

3. 100-কে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যে বৃহত্তর অংশের তিনগুণ যেন ক্ষুদ্রতর অংশের 7 গুণের সমান হয়।

4. একটি সংখ্যার 7 গুণ, 10 হইতে যত কম উহার 21 গুণ 18 হইতে ঠিক তত বেশী ; সংখ্যাটি কত ?

5. দুইটি সংখ্যার যোগফল 13 ; ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটির সহিত 19 যোগ করিলে যোগফল বৃহত্তর সংখ্যাটির 3 গুণের সমান হয়। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

6. দুইটি সংখ্যার অন্তর 9 ; সংখ্যা দুইটির সমষ্টি উহাদের অন্তরের 5 গুণ হইলে সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

7. কোনও একটি সংখ্যার 3 গুণ 150 হইতে যত কম উহার 7 গুণ 150 হইতে তত বেশী, সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

8. দুইটি সংখ্যার যোগফল 240 এবং বিয়োগফল 20 হইলে সংখ্যা দুইটি কত ?

9. দুইটি সংখ্যার বিয়োগফল 12, বড় সংখ্যাটির দ্বিগুণ ছোট সংখ্যাটির তিনগুণের সমান হইলে সংখ্যা দুইটি কত ?

10. পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 7 গুণ, 10 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 3 গুণ হইবে। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।

11. A-এর বর্তমান বয়স B ও C-এর বর্তমান বয়সের সমষ্টির সমান। 10 বৎসর পরে A-এর বয়সের 17 গুণ, B ও C-এর বয়সের সমষ্টির 12 গুণের সমান হইবে। A-এর বর্তমান বয়স কত ?

12. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 60 ; একটি সংখ্যার দ্বিগুণ অপর সংখ্যাটির $\frac{3}{4}$ অংশ অপেক্ষা 10 অধিক। সংখ্যা দুইটি কত ?

13. দুইটি ক্রমিক অযুগ্ম সংখ্যার ছোটটির $\frac{1}{3}$ অংশ, বড়টির $\frac{1}{7}$ অংশ অপেক্ষা 6 অধিক, সংখ্যা দুইটি কত ?

14. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনও রাশির দশকের অঙ্কটি এককের অঙ্ক অপেক্ষা 3 বেশী। সংখ্যাটি যদি উহার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির 7 গুণ হয় তাহা হইলে সংখ্যাটি কত ?

15. একটি ফলের দোকানের সমগ্র ফলের এক-পঞ্চমাংশ আপেল এবং এক-তৃতীয়াংশ কমলা লেবু। এতদ্ব্যতীত ঐ দোকানে আরও 130টি পেয়ারা ও 30টি বেদানা আছে। ঐ দোকানে মোট কতগুলি আপেল আছে নির্ণয় কর।

অসমীকরণ

99. মনে কর a এবং b দুইটি বাস্তব রাশি। ইহারা পরস্পর সমান হইতে পারে আবার নাও হইতে পারে। যদি a, b-এর সমান হয় তবে আমরা a ও b-এর মাঝখানে সমতাজ্ঞাপক চিহ্ন দিয়া লিখি $a=b$. আর যদি রাশি দুইটি অসমান হয় তবে $a \neq b$ লিখিয়া আমরা রাশি দুইটির অসমতা প্রকাশ করি। এখন a, b-এর সমান না হইলে a, b অপেক্ষা বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে। a, b অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে $a>b$ এবং a, b অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে $a<b$ লেখা হয়।

$a=b$, a ও b এর সমতাজ্ঞাপক বিবৃতি এবং $a>b$ ও $a<b$ এই দুইটি a ও b-এর অসমতাজ্ঞপক বিবৃতি।

a, b, c জ্ঞাত রাশি এবং x একটি অজ্ঞাত রাশি হইলে, $ax+b=$

$cx+d$ একটি সরল সমীকরণ ; আর, $ax+b>cx+d$, $ax+b<cx+d$, $ax+b \geqslant cx+d$ প্রভৃতি এক একটি সরল অসমীকরণ (Simple Inequation)।

$7<6x+5$, $-5<x-7$, $3x-2<16$, $-2x+\frac{1}{4} \leqslant 7x-8\frac{1}{3}$, $5x+7<4x+13$ প্রভৃতি সরল অসমীকরণের কয়েকটি উদাহরণ।

সরল সমীকরণে x-এর একটি নির্দিষ্ট মানের জন্য সমতাচিহ্নের উভয় পার্শ্বস্থ রাশিদ্বয়ের মান সমান হয়। সরল অসমীকরণে x-এর এমন একাধিক মান থাকে যে মানগুলির প্রত্যেকটির দ্বারা অসমীকরণটির অসমতা চিহ্নের উভয়পার্শ্বস্থ রাশিদ্বয়ের পারস্পরিক সম্পর্ক অপরিবর্তিত থাকে।

x-এর যে বাস্তব মানগুলির জন্য অসমীকরণের অসমতা চিহ্নের উভয় পার্শ্বস্থ রাশিদ্বয়ের পারস্পরিক সম্বন্ধ সত্য সেই মানগুলিকে অসমীকরণের সমাধান (Solution) বলে।

$5x+3<17$ একটি অসমীকরণ। এই অসমীকরণে x-এর পরিবর্তে $6, 5, -3, -5, 7, 9, 12$ প্রভৃতি বসাইলে দেখা যাইবে $6, 5, -3, -5$ সংখ্যাগুলির প্রত্যেকটি $2x+3<17$ এর সমাধান, কারণ এই মানগুলির যে-কোনও একটি x-এর পরিবর্তে বসাইলে $2x+3$-এর মান 17 অপেক্ষা কমই থাকে আর 7, 9, 12 সংখ্যাগুলির কোনটিই অসমীকরণটির সমাধান নহে ; কারণ x-এর পরিবর্তে 7 বসাইলে $2x+3$-এর মান 17-এর সমান হয় এবং 9 বা 12 বসাইলে উহার মান 17 অপেক্ষা বেশী হয়।

অন্য কোনও শর্ত আরোপ না করিলে $2x+3<17$-এর সমাধান অগণিত। $6, 5, -3, -5$ সেই অগণিত সমাধানের কয়েকটি মাত্র।

যদি দুইটি সমীকরণ অজ্ঞাত রাশির কোনও নির্দিষ্ট মানের দ্বারা সিদ্ধ হয় তবে সমীকরণ দুইটিকে তুল্য সমীকরণ বলে। $3x+2=20$ এবং

$x-3=3$ দুইটি তুল্য সমীকরণ কারণ, দুইটি সমীকরণই কেবলমাত্র $x=6$ দ্বারা সিদ্ধ হয়।

100. তেমনি একই অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট দুই বা ততোধিক অসমীকরণের একটির যে সমাধান পাওয়া যায় অপরগুলিরও যদি সেই সমাধানই পাওয়া যায় তবে অসমীকরণগুলিকে তুল্য অসমীকরণ বলে।

$5x+2<17$ এবং $3x-8<2x-5$ দুইটি তুল্য অসমীকণ। কারণ একটু লক্ষ্য করিলেই দেখা যাইবে 3 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর যে-কোনও বাস্তব রাশিই উভয় অসমীকরণের সমাধান। দুইটি অসমীকরণ তুল্য ইহা বুঝাইতে হইলে উহাদের মধ্যে ≡ চিহ্নটি ব্যবহার করিতে হয়, যেমন $5x+2<17\equiv 3x-8<2x-5$.

101. অসমতা সম্পর্কিত কয়েকটি সহজ সিদ্ধান্ত

1. যদি $a<b$ হয়, তবে $b>a$; যেমন, $5<6$ বলিয়া অবশ্যই $6>5$.
2. যদি $a<b$ হয়, তবে $(a+k)<(b+k)$; যেমন $3<4$ হইলে $(3+2)<(4+2)$.
3. যদি $a<b$ এবং $b<c$ হয় তবে $a<c$; যেমন $2<3$ এবং $3<4$ হইলে $2<4$.
4. যদি $a<b$ হয় এবং $c>0$ হয় অর্থাৎ, c-এর নান ধনাত্মক হয় তবে $ac<bc$; যেমন, $7<8$ এবং $3>0$ সুতরাং $7\times 3<8\times 3$.
5. যদি $a<b$ হয় এবং $c<0$ হয় অর্থাৎ, c-এর মান ঋণাত্মক হয় তবে $ac>bc$; যেমন, $5<7$ এবং $-2<0$ সুতরাং $5\times(-2)>7\times(-2)$.

উপরিউক্ত সিদ্ধান্তগুলি স্বতঃসিদ্ধ। অসমীকরণের সমাধানে সর্বদাই এই স্বতঃসিদ্ধগুলি প্রয়োগ করিবার প্রয়োজন হয়।

নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ দিয়া অসমীকরণের সমাধান প্রণালী প্রদর্শিত হইল।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $5x-3>22$

$5x-3>22$

বা, $5x-3+3>22+3$ [উভয় পক্ষে 2 যোগ করিয়া]

বা, $5x>25$ সিদ্ধান্ত 2

বা, $5x\times\frac{1}{5}>25\times\frac{1}{5}$ [উভয় পক্ষকে $\frac{1}{5}$ দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $x>5$ সিদ্ধান্ত 4

∴ 5 অপেক্ষা বৃহত্তর যে কোনও বাস্তব রাশিই প্রদত্ত অসমীকরণের সমাধান।

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $\frac{x+2}{3}-\frac{x+3}{4}\leqslant\frac{x+4}{5}-\frac{x+5}{6}$

$$\frac{x+2}{3}-\frac{x+3}{4}\leqslant\frac{x+4}{5}-\frac{x+5}{6}$$

বা, $\frac{4x+8-3x-9}{12}\leqslant\frac{6x+24-5x-25}{30}$

বা, $\frac{x-1}{12}\leqslant\frac{x-1}{30}$

বা, $\frac{x-1}{12}\times 60\leqslant\frac{x-1}{30}\times 60$

[উভয় পক্ষকে 12 ও 30-এর ল. সা. গু. দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $5(x-1)\leqslant 2(x-1)$

বা, $5x-5\leqslant 2x-2$

বা, $5x-2x-5\leqslant 2x-2x-2$

[উভয় পক্ষে $-2x$ যোগ করিয়া]

বা, $3x-5\leqslant -2$

বা, $3x-5+5\leqslant -2+5$ [উভয় পক্ষে $+5$ যোগ করিয়া]

বা, $3x\leqslant 3$

বা, $x \leqslant 1.$ [উভয় পক্ষকে $\frac{1}{3}$ দ্বারা গুণ করিয়া]

অতএব 1 অথবা 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর প্রত্যেক বাস্তব রাশি প্রদত্ত অসমীকরণের সমাধান।

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $7(2x+5)-8(2x+1) \geqslant (3x-5)-(2x-17)$

$7(2x+5)-8(2x+1) \geqslant (3x-5)-(2x-17)$

বা, $14x+35-16x-8 \geqslant 3x-5-2x+17$

বা, $-2x+27 \geqslant x+12$

বা, $-2x+27-27 \geqslant x+12-27$

[উভয় পক্ষে -27 যোগ করিয়া]

বা, $-2x \geqslant x-15$

বা, $-2x-x \geqslant x-15-x$ [উভয় পক্ষে $-x$ যোগ করিয়া]

বা, $-3x \geqslant -15$

বা, $-3x \times (-\frac{1}{3}) \leqslant -15 \times (-\frac{1}{3})$

[উভয় পক্ষকে $-\frac{1}{3}$ দ্বারা গুণ করিয়া] (সিদ্ধান্ত 5)

বা, $x \leqslant 5.$

অতএব 5 বা 5 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর যে কোনও বাস্তব রাশি প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান হইতে পারে।

উদাহরণ 4. 8 অপেক্ষা বৃহত্তর কোনও একটি অখণ্ড সংখ্যার দ্বিগুণ হইতে 5 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 17 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইল। এইরূপ কয়টি এবং কি কি সংখ্যা থাকিতে পারে ?

মনে কর অজ্ঞাত অখণ্ড সংখ্যাগুলির একটি, x

প্রশ্নের শর্তানুসারে $x > 8 \cdots\cdots(1)$

এবং $(2x-5) < 17 \cdots\cdots(2)$

এখন, $2x-5<17$

বা, $2x-5+5<17+5$ [উভয় পক্ষে $+5$ যোগ করিয়া]

বা, $2x<22$

বা, $2x\times\frac{1}{2}<22\times\frac{1}{2}$ [উভয় পক্ষকে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $x<11$······(3)

(1) ও (3) হইতে বলা যায় x, 8 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং 11 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

∴ নির্ণেয় অখণ্ড সংখ্যা 9 এবং 10.

উদাহরণ 5. দুইটি অখণ্ড সংখ্যার একটি অপরটি অপেক্ষা 8 বেশী এবং সংখ্যা দুইটির যোগফল 20 অপেক্ষা কম এই প্রকার তিন জোড়া সংখ্যা নির্ণয় কর।

মনে কর ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি x, সুতরাং বৃহত্তর সংখ্যাটি $x+8$

শর্তানুসারে $x+(x+8)<20$ ।

বা, $2x+8<20$

বা, $2x+8-8<20-8$ [উভয় পক্ষে -8 যোগ করিয়া]

বা, $2x<12$

বা, $2x\times\frac{1}{2}<12\times\frac{1}{2}$ [উভয় পক্ষকে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $x<6$

∴ ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি 6 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। এখন যেহেতু বৃহত্তর সংখ্যাটি $x+8$ এবং $x<6$ বৃহত্তর সংখ্যাটি 14 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

∴ সংখ্যাযুগল (5,13), (4,12) এবং (3,11) হইতে পারে।

প্রশ্নমালা 25

সমাধান কর :—

1. $x+2<3$
2. $2x-1>7$
3. $3x+5<14$
4. $4x+2<0$
5. $7x-5>2$
6. $3x-1<x+2$
7. $5x-6\leqslant x+2$
8. $\frac{2x+3}{5}\leqslant\frac{3x+4}{7}$
9. $\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{4}>\frac{x-1}{2}$
10. $\frac{5x+2}{4}-\frac{2x-1}{3}\leqslant\frac{x+5}{2}$

11. অজয়ের কাছে x–সংখ্যক মার্বেল আছে। যদি $x>3$ এবং $x+1<8$ হয় তবে x-এর সম্ভাব্য মানগুলি নির্ণয় কর।

12. অতনু কয়েকখানা খাতা কিনিয়া দেখিল যে তাহার খাতার সংখ্যার 3 গুণ হইতে 3 বিয়োগ করিলে সংখ্যাটি 21 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়। যদি সে 5টির বেশী খাতা কিনিয়া থাকে তবে তাহার খাতার সম্ভাব্য সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

13. একটি বড় ও একটি ছোট জামার মূল্য একত্রে 30 টাকার কম। বড় জামাটির মূল্য ছোট জামাটির মূল্য অপেক্ষা 12 টাকা বেশী। প্রত্যেকটি জামার মূল্যই পূর্ণসংখ্যক টাকা হইলে বড় জামাটির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মূল্য কত হইতে পারে ?

14. একদিনের ক্রিকেট খেলায় শ্যামলের রাণসংখ্যা সমীরের রাণসংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 17 কম হইল। শ্যামল, সমীর অপেক্ষা কমপক্ষে 15 রাণ বেশী করিয়াছে। শ্যামল 50-এর অধিক রাণ না করিয়া থাকিলে কাহার রাণ-সংখ্যা কত ?

15. দুইটি সংখ্যার যোগফল 75-এর কম ; সংখ্যা দুইটির অন্তর 23 ; যদি ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি 22 অপেক্ষা বৃহত্তর হয় তবে সংখ্যা দুইটি কি কি হইতে পারে ?

নবম অধ্যায়

সরল সমীকরণের লেখ।

102. বীজগণিতের সুত্রাবলী ও সমীকরণের সাহায্যে কিভাবে পাটীগণিতের প্রশ্নাবলীর সমাধান করা যায় তাহা তোমরা পূর্বেই শিখিয়াছ। বর্তমান অধ্যায়ে বীজগণিতীয় রাশি ও রাশিমালা কিরূপে বিন্দু, রেখা ইত্যাদি জ্যামিতিক চিত্রের দ্বারা সূচিত হইতে পারে তাহাই আলোচিত হইবে। লক্ষীয়, প্রায়শঃ পূর্বোক্ত বীজগণিতীয় প্রণালী অপেক্ষা এই জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে বীজগণিতের সমীকরণগুলির সমাধান সহজতর হয়। এইরূপ চিত্র-সাহায্যে প্রশ্ন সমাধানের পদ্ধতিকে লৈখিক প্রক্রিয়া (Graphical method) বলে।

পরিবর্তনশীল কোনও রাশির মান বিভিন্ন সময়ে এবং বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিভিন্ন হইয়া থাকে। কোন একটি বিশেষ অবস্থায় ঐরূপ পরিবর্তনশীল একটি রাশির মান নির্ণয়ের যেমন প্রয়োজন হয় তেমনি উহার পরিবর্তনের হার জানিবারও প্রয়োজন হয়। বিভিন্ন মানগুলিকে চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করিলে পরিবর্তিত রাশির মানসমূহ ও তাহার পরিবর্তনের হার সম্বন্ধে একটা সুস্পষ্ট ধারণা জন্মে। এই কারণেই এইরূপ চিত্রের ব্যবহার বিজ্ঞানজগতে ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইতেছে।

103. যে সকল জ্যামিতিক রেখা বা চিত্রের সাহায্যে কোনও পরিবর্তনশীল রাশির মানের পরিবর্তন সম্পর্কে আমাদের সুস্পষ্ট ধারণা জন্মে সেই চিত্র বা রেখাগুলিকেই ঐ পরিবর্তনশীল রাশিটির লেখ বা লৈখিক চিত্র (Graph) বলে।

লেখ অঙ্কন করিতে অগ্রসর হইবার পূর্বে ছক কাগজ ও উহার ব্যবহার সম্বন্ধে একটা পরিষ্কার ধারণা করিয়া লইতে হইবে। অতএব পরবর্তী অনুচ্ছেদগুলিতে সেই সম্বন্ধে আলোচনা করা হইল।

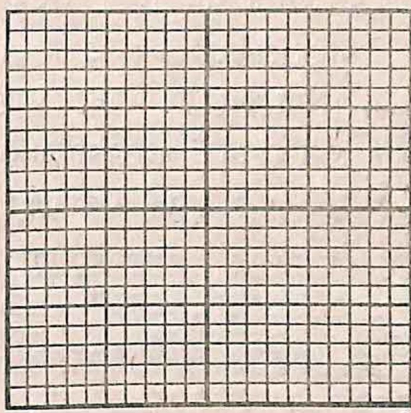
104. অক্ষ ও মূলবিন্দু ঃ মনে কর খেলার মাঠে একটি ক্রিকেট বল পড়িয়া আছে। বলটি তুমি দেখিয়াছ এবং লক্ষ্য করিয়াছ যে খেলার মাঠের পূর্বদিকের সীমারেখা হইতে দশ হাত পশ্চিমে এবং উত্তরদিকের সীমারেখা হইতে পনেরো হাত দক্ষিণে বলটি রহিয়াছে। যে-বালকেরা বলটি খুঁজিতেছে তাহাদের একজনকে কথাটা তুমি বলিলে। বালকটি মাঠের উত্তর-পূর্ব কোণ হইতে উত্তরের সীমারেখা ধরিয়া দশ হাত পশ্চিমে হাঁটিয়া আসিয়া সোজা দক্ষিণ দিকে হাঁটিতে সুরু করিল এবং পনোরো হাত আসিয়া থামিল। উত্তর ও পূর্ব সীমারেখা হইতে বলটির ব্যবধান সম্বন্ধে তোমার অনুমান যদি ভুল না হয় তবে এইভাবে হাঁটিয়া আসিবার ফলে বলটি যেখানে আছে বালকটি যে সেইখানেই আসিয়া উপস্থিত হইবে এ বিষয়ে কোন সন্দেহ নাই।

খেলার মাঠে পরস্পর সমকোণে অবস্থিত প্রান্তীয় সীমারেখা বর্তমান থাকায় ঐ রেখার উল্লেখ করিয়া তুমি যেমন বলটির অবস্থান সম্পর্কে নির্দেশ দিলে তেমনি কোনও সমতলে যদি পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে এইরূপ দুইটি সরলরেখা থাকে এবং রেখা দুইটি হইতে ঐ সমতলস্থিত কোনও বিন্দুর দূরত্ব জানা থাকে তবে নির্ভুলভাবে ঐ বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করা যায়।

পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত যে দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সাহায্যে কোনও সমতলের বিন্দুসমূহের অবস্থান নির্ণয় করা হয় গণিতে সেই রেখা দুইটির প্রত্যেকটিকে অক্ষ (Axis) বলে। অক্ষদ্বয়ের একটি অনুভূমিক (Horizontal) সরলরেখা ও অপরটি উল্লম্ব (Vertical) সরলরেখা। অনুভূমিক অক্ষটিকে XX' দ্বারা এবং উল্লম্ব অক্ষটিকে YY' দ্বারা সূচিত করা হয়। XX' সরলরেখাকে x-অক্ষ এবং YY'-কে y-অক্ষ বলে। x-অক্ষ ও y-অক্ষ যে বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে সেই বিন্দুটির নাম

মূলবিন্দু (Origin); মূলবিন্দুকে ইংরেজী বর্ণমালার 'O' অক্ষরটি দ্বারা সূচিত করা হয়।

105. ছক কাগজ : ছক কাগজের একটি নমুনা নিম্নে দেওয়া হইল। ইহাতে দুই শ্রেণীর সমদূরবর্তী সমান্তরাল সরলরেখা দেখিতে পাইবে।

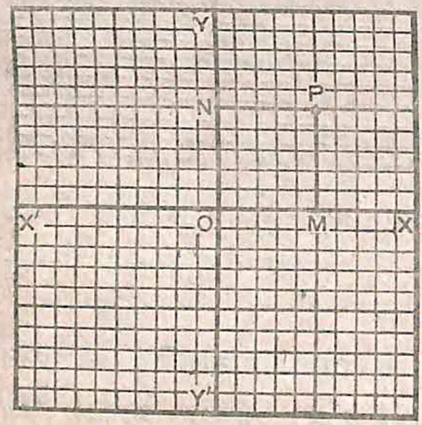


এক শ্রেণীর রেখাগুলি চৌকো কাগজের দৈর্ঘ্যের সমান্তরাল করিয়া ও অপরশ্রেণীর রেখাগুলি উহার প্রস্থের সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত বলিয়া এবং উভয়শ্রেণীর যে-কোনও দুইটি রেখার ব্যবধান সমান বলিয়া প্রথম শ্রেণীর প্রত্যেকটি রেখা দ্বিতীয় শ্রেণীর প্রত্যেকটি রেখাকে লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে এবং সমস্ত কাগজখানা কতকগুলি ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত হইয়াছে। এইরূপ বর্গাঙ্কিত কাগজকে ছক কাগজ (Squared Paper অথবা Graph Paper) বলে।

সাধারণ ছক কাগজে সমদূরবর্তী সমান্তরাল রেখাগুলির পরস্পরের ব্যবধান এক ইঞ্চির এক-দশমাংশ বা 0·1 ইঞ্চি। সুতরাং প্রত্যেক ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 0·1 ইঞ্চি। লক্ষ্য কর গণনার সুবিধার জন্য ছক কাগজে প্রত্যেক পঞ্চম ও দশম রেখা কিঞ্চিৎ স্থূলতর করিয়া অঙ্কিত হইয়াছে। ফলে এই স্থূলরেখাগুলির্দ্বারাও দুইটি বিভিন্ন আয়তনের কতকগুলি বর্গক্ষেত্র উৎপন্ন হইয়াছে : প্রথমশ্রেণীর বর্গক্ষেত্রগুলির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 0·5 ইঞ্চি বা $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি ; অপরশ্রেণীর বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 1 ইঞ্চি। যদি দৈর্ঘ্যের একক ফুট, ইঞ্চি না ধরিয়া সেন্টিমিটার, মিলিমিটার ধরা হয় তবে ছক কাগজখানা এইরূপভাবেও ভাগ করা যায়

যে ছোট বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য যেন এক সেন্টিমিটারের এক-দশমাংশ অর্থাৎ এক মিলিমিটার হয়। ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য যাহাই হউক না কেন ইহাকে যে-কোনও স্কেলে ফুট, গজ, মাইল বা সেন্টিমিটার, মিটার, কিলোমিটার ইত্যাদিরূপে কল্পনা করা যায়। কোনও বিশেষ পরিমাপের উল্লেখ না থাকিলে প্রতি ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে এক একক ধরিতে হয়। ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্য হইলে তাহাকে 3 একক, পাঁচটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্য হইলে 5 একক বলিয়া উল্লেখ করিতে হয়।

106. ভুজ, কোটি ও স্থানাঙ্ক : পার্শ্বস্থ ছক কাগজে XX′ ও YY′ দুইটি অক্ষ এবং O, মূলবিন্দু।

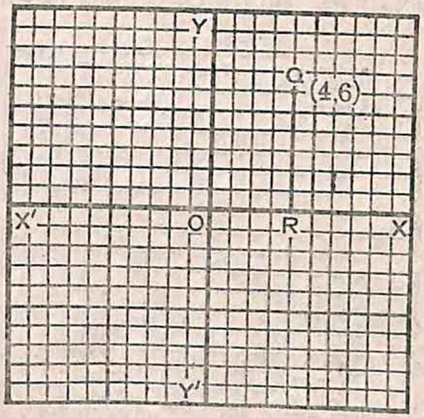


এই ছক কাগজের সমতলে P একটি বিন্দু লওয়া হইয়াছে। মনে কর, অক্ষদ্বয় হইতে P বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে।

P বিন্দু হইতে XX′-এর উপর PM এবং YY′-এর উপর PN লম্ব টানা হইল। এখন, PM, XX′ হইতে P বিন্দুর দূরত্ব এবং PN, YY′ হইতে P বিন্দুর দূরত্ব প্রকাশ করিবে। এই উভয় দূরত্বের সাংখ্যমানকেই P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (Co-ordinates) বলা হয়।

চিত্র হইতে দেখিতে পাইবে PN = OM। সুতরাং কোনও একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইলে ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুটি হইতে x-অক্ষের উপর একটি লম্ব টানিয়া মূলবিন্দু হইতে ঐ লম্বের পাদবিন্দু পর্যন্ত গুণিয়া গেলে YY′ হইতে বিন্দুটির দূরত্ব এবং লম্বের পাদবিন্দু হইতে উপরদিকে ঐ বিন্দুটি পর্যন্ত গুণিয়া গেলে XX′ হইতে বিন্দুটির দূরত্ব পাওয়া যাইবে।

মনে কর তুমি যে-কোনও একটি বিন্দু Q-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিবে (নিম্নের চিত্র দেখ)। তুমি Q হইতে XX'-এর উপর একটি লম্ব টানিলে এবং উহার নাম দিলে QR, তাহা হইলে OR ও RQ-এর সাংখ্যমানই Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে। ইহাদের মধ্যে OR-কে Q বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক (x-co-ordinate) বা ভুজ (Abscissa) এবং RQ-কে Q বিন্দুর y-স্থানাঙ্ক (y-co-ordinate) বা কোটি (Ordinate) বলে।



গুণিয়া দেখ উপরের চিত্রে Q বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক বা ভুজ 4 একক ও y-স্থানাঙ্ক বা কোটি 6 একক।

কোনও বিন্দুর ভুজ ও কোটি 4 এবং 6 হইলে বিন্দুটিকে '(4,6)' বিন্দু বা সংক্ষেপে '(4,6)' বলা হয়। এইরূপে ভুজ a একক এবং কোটি b একক হইলে বিন্দুটিকে (a,b) বিন্দু বলা হয়। স্থানাঙ্ক দুইটির মধ্যে ভুজকে প্রথমে এবং কোটিকে পরে উল্লেখ করিতে হয়।

দ্রষ্টব্য : x-অক্ষের উপরিস্থ প্রত্যেক বিন্দুর কোটি = O (শূন্য)

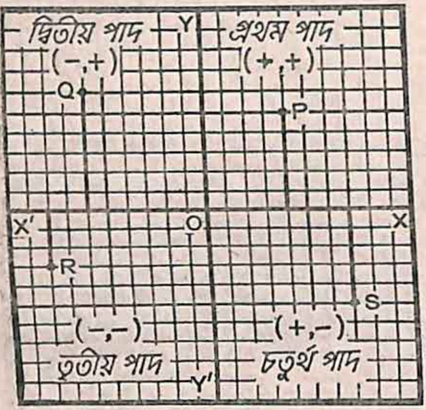
y-অক্ষের উপরিস্থ প্রত্যেক বিন্দুর ভুজ = O (শূন্য)

মূলবিন্দুর ভুজ = O (শূন্য) এবং কোটি = O (শূন্য)

অর্থাৎ (O,O) বিন্দুটিই মূলবিন্দু।

ধনাত্মক ও ঋণাত্মক ভুজ ও কোটি : OX ও OY-কে যথাক্রমে x-অক্ষের ও y-অক্ষের ধনাত্মক (Positive) দিক বলিয়া গণ্য করিলে OX' ও OY' কে যথাক্রমে x-অক্ষের ও y-অক্ষের ঋণাত্মক দিক বলিয়া গণ্য করিতে হয়। ইহাই প্রচলিত রীতি।

মূলবিন্দুর ডানদিকে যে কোনও বিন্দুর ভুজ ধনাত্মক ও বামদিকের যে কোনও বিন্দুর ভুজ ঋণাত্মক বলিয়া গণ্য হয়। আবার O বিন্দু হইতে উপরদিকে অবস্থিত যে কোনও বিন্দুর কোটি ধনাত্মক এবং নীচের দিকে অবস্থিত যে কোনও বিন্দুর কোটি ঋণাত্মক বলিয়া গণ্য হইয়া থাকে।



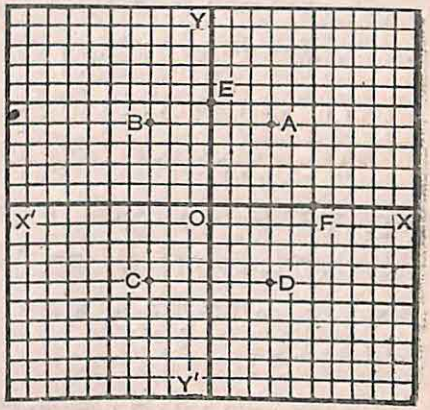
107. পাদ : দুইটি অক্ষ ছক কাগজকে যে চারিটি অংশে বিভক্ত করে তাহাদের প্রত্যেক অংশকে একটি পাদ (Quadrant) বলা হয়। (পার্শ্বের চিত্র দেখ)। XOY, X'OY, X'OY' ও XOY'-কে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ পাদ বলা হয়।

108. স্থানাঙ্কের চিহ্ন-বিষয়ক নিয়ম : কোনও বিন্দুর ভুজ ও কোটি উভয়েই ধনাত্মক হইলে বিন্দুটি প্রথম পাদে (First Quadrant) অবস্থিত হইবে। কোনও বিন্দুর ভুজ ঋণাত্মক ও কোটি ধনাত্মক হইলে বিন্দুটি দ্বিতীয় পাদে, ভুজ ও কোটি উভয়েই ঋণাত্মক হইলে বিন্দুটি তৃতীয় পাদে এবং ভুজ ধনাত্মক ও কোটি ঋণাত্মক হইলে বিন্দুটি চতুর্থ পাদে অবস্থিত হইবে।

109. ছক কাগজে বিন্দু-সংস্থাপন প্রণালী : ছক কাগজে অবস্থিত কোনও বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়ের প্রণালী তোমরা শিখিয়াছ। এখন, কোনও বিন্দুর স্থানাঙ্ক জানা থাকিলে ছক কাগজে উহা কিভাবে স্থাপন করিতে হয় তাহা লক্ষ্য কর। বস্তুতঃ বিন্দু-সংস্থাপন প্রক্রিয়া বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়ের প্রক্রিয়ার বিপরীত বলিয়া প্রথম প্রক্রিয়াটি আয়ত্ত হইলেই দ্বিতীয়

প্রক্রিয়াটিও সহজেই আয়ত্ত হয়। নিম্নে একটি উদাহরণ দিয়া বিন্দু-সংস্থাপন প্রণালী দেখান হইল।

উদাহরণ 1 : A, B, C, D, E ও F এই ছয়টি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3,4), (-3,4), (-3,-4), (3,-4), (0,5) এবং (5,0)—ইহাদিগকে ছককাগজে সংস্থাপন কর।



প্রথমে XOX' ও YOY' অক্ষদ্বয় অঙ্কিত করিয়া ছক কাগজখানাকে চারিটি পাদে বিভক্ত করিয়া লও। অতঃপর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া (1) মূল বিন্দু O হইতে ডানদিকে 3 একক এবং তারপর উপরদিকে 4 একক যাও ; A বিন্দুটি পাইবে। বিন্দুটি সংস্থাপিত করিয়া বিন্দুটির পার্শ্বে A অক্ষরটি লেখ। দেখ, x-স্থানাঙ্ক ও y-স্থানাঙ্ক উভয়েই ধনাত্মক বলিয়া, A বিন্দুটি প্রথম পাদে অবস্থিত।

(2) মূলবিন্দু O হইতে বামদিকে 3 একক এবং তথা হইতে উপরের দিকে 4 একক গেলে তুমি B বিন্দুটি পাইবে। বিন্দুটি সংস্থাপন কর এবং বিন্দুটির পাশে B লেখ। দেখ B-এর x-স্থানাঙ্ক ঋণাত্মক এবং y-স্থানাঙ্ক ধনাত্মক বলিয়া বিন্দুটি দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত।

(3) মূলবিন্দু O হইতে 3 একক বামদিকে এবং তথা হইতে 4 একক নীচের দিকে গেলে C বিন্দুটি পাইবে। বিন্দুটি সংস্থাপন করিয়া উহার পাশে C লেখ। দেখ C-এর x-স্থানাঙ্ক ও y-স্থানাঙ্ক উভয়েই ঋণাত্মক বলিয়া বিন্দুটি তৃতীয় পাদে অবস্থিত।

(4) মূলবিন্দু O হইতে ডানদিকে 3 একক এবং তথা হইতে নীচের

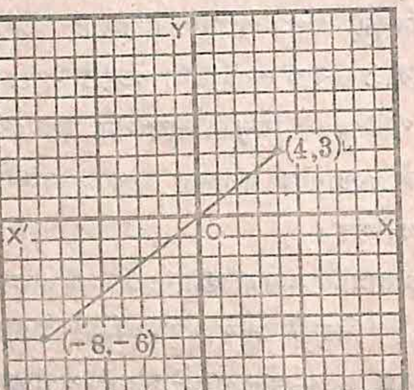
দিকে 4 একক যাও ; D বিন্দুটি পাইবে। বিন্দুটি সংস্থাপন করিয়া পাশে D লেখ। দেখ D-এর x-স্থানাঙ্ক ধনাত্মক ও y-স্থানাঙ্ক ঋণাত্মক বলিয়া বিন্দুটি চতুর্থ পাদে অবস্থিত।

(5) পঞ্চম বিন্দুটির x-স্থানাঙ্ক শূন্য। সুতরাং মূলবিন্দু হইতে ডানদিকে বা বামদিকে,কোনদিকেই না যাইয়া y-অক্ষ বরাবর উপরের দিকে 5 একক গেলে E বিন্দুটি পাইবে। বিন্দুটি সংস্থাপন করিয়া পাশে E লেখ। লক্ষ্য কর (0, 5) বিন্দুটি y অক্ষের উপর অবস্থিত।

(6) মূলবিন্দু হইতে x-অক্ষ বরাবর ডানদিকে 5 একক যাও এবং বিন্দুটি সংস্থাপন কর। পাশে F লেখ। লক্ষ্য কর এখানে মূলবিন্দুর ডানদিকে 5 একক যাওয়ার পরে, উপর বা নীচ কোন দিকেই যাইতে হইল না কারণ বিন্দুটির y-স্থানাঙ্ক শূন্য। (5, O) বিন্দুটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত।

ছক কাগজের ব্যবহারমূলক কয়েকটি উদাহরণ নিম্নে দেওয়া হইল।

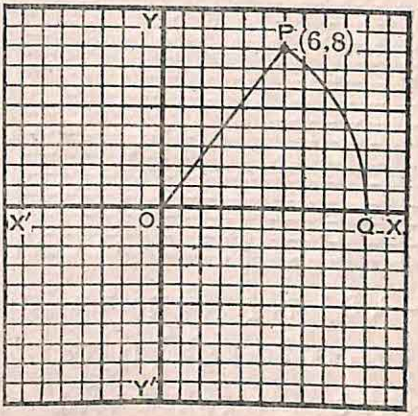
উদাহরণ 1 : (4,3) ও (-8, -6) বিন্দু দুইটি স্থাপন করিয়া একটি সরলরেখা দ্বারা উহাদের যুক্ত কর।



XOX' ও YOY' অক্ষদ্বয় অঙ্কিত করিয়া এবং ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে এককরূপে লইয়া বিন্দুসংস্থাপনের প্রণালী অনুযায়ী (4, 3) ও (-8, -6) বিন্দুদ্বয় ছক কাগজে স্থাপন করা হইল। অতঃপর একটি মাপনীর সাহায্যে বিন্দু দুইটিকে একটি সরলরেখাদ্বারা যুক্ত করিলে (4, 3) ও (−8, −6) বিন্দুদ্বয়ের

সংযোজক সরলরেখাটি পাওয়া গেল। দেখা গেল সরলরেখাটি মূলবিন্দু O দিয়া গিয়াছে।

উদাহরণ 2. (6, 8) বিন্দুটি স্থাপন করিয়া মূলবিন্দু হইতে উহার দূরত্ব নির্ণয় কর।

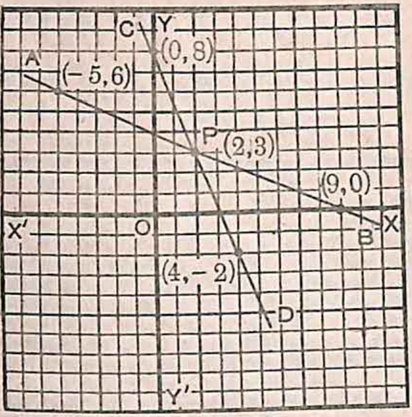


XOX' ও YOY' অক্ষদ্বয় অঙ্কন করিয়া এবং ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে এককরূপে লইয়া (6, 8) বিন্দুটি সংস্থাপিত হইল এবং এই বিন্দুটির নাম দেওয়া হইল P। অতঃপর O-কে কেন্দ্র করিয়া এবং OP-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কন করিলে ঐ চাপ যে বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করিল তাহার নাম দেওয়া হইল Q। একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া OP = OQ হইবে। গুণিয়া দেখা গেল OQ = 10 একক। সুতরাং OP = 10 একক, অর্থাৎ মূলবিন্দু হইতে (6, 8) বিন্দুটির নির্ণেয় দূরত্ব = 10 একক।

উদাহরণ 3. (9,0) ও (−5,6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা এবং (4, −2) ও (0, 8) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা যে বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

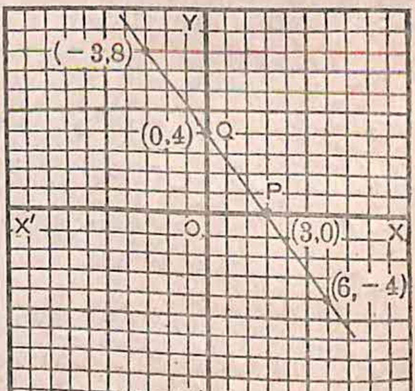
যথারীতি XOX' ও YOY' অক্ষদ্বয় অঙ্কন করিয়া এবং ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া (9, 0) ও (−5, 6) বিন্দুদ্বয় সংস্থাপিত হইল এবং একটি সরলরেখাদ্বারা উহাদের যুক্ত করিয়া সরলরেখাটির নাম দেওয়া হইল AB.

অনুরূপে (4, −2) ও (O, 8) বিন্দু দুইটিকে স্থাপন করিয়া উহাদের নাম দেওয়া হইল C ও D ; এইবার C ও D-কে সংযুক্ত করিয়া একটি সরলরেখা অঙ্কন করিয়া দেখা গেল যে উহা AB সরলরেখাকে ছেদ করিয়াছে। মনে কর ছেদবিন্দুটির নাম P ; গুণিয়া দেখা গেল P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2,3)।



উদাহরণ 4. (6, −4) ও (−3, 8) বিন্দু দুইটি স্থাপন করিয়া একটি সরলরেখা দ্বারা যুক্ত কর এবং সরল রেখাটি যে দুইটি বিন্দুতে x-অক্ষ ও y-অক্ষকে ছেদ করিল তাহাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

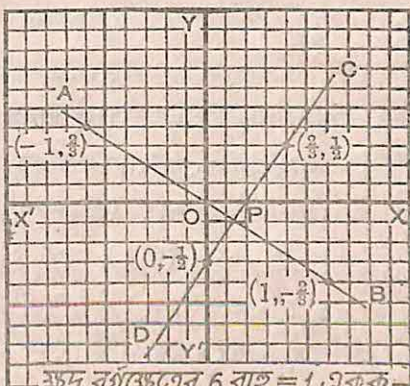
XOX' ও YOY' অক্ষদ্বয় অঙ্কন করিয়া এবং ক্ষুদ্রতম বর্গ-ক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া (6, −4) ও −3, 8) বিন্দুদ্বয় ছক কাগজে স্থাপন করা হইল। অতঃপর একটি সরলরেখাদ্বারা উহাদের যুক্ত করিয়া রেখাটি যে-বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করিয়াছে তাহার নাম দেওয়া হইল P এবং যে-বিন্দুতে y-অক্ষকে ছেদ করিয়াছে তাহার নাম দেওয়া হইল Q.



P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 0) এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 4) হইল।

উদাহরণ 5. $(-1, \frac{2}{3})$ এবং $(1, -\frac{2}{3})$ বিন্দু দুইটি স্থাপন করিয়া একটি সরলরেখাদ্বারা বিন্দু দুইটিকে যুক্ত কর। $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ এবং $(0, -\frac{1}{2})$ বিন্দু দুইটি স্থাপন করিয়া অপর একটি সরলরেখাদ্বারা উহাদের যুক্ত কর। দেখাও যে এই দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব।

বিন্দুগুলির সব স্থানাঙ্ক পূর্ণসংখ্যা নহে। উহাদের মধ্যে ভগ্নাংশ আছে। ভগ্নাংশগুলির হর সমূহের ল.সা.গু. $=6$; সুতরাং এক্ষেত্রে ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যের 6 গুণকে একক ধরিলে বিন্দু স্থাপন সহজ হইবে।



ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 6 বাহু = 1 একক

XOX′ এবং YOY′ অক্ষদ্বয় অঙ্কন করিয়া এবং ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর 6 গুণকে একক ধরিয়া $(-1, \frac{2}{3})$ ও $(1, -\frac{2}{3})$ বিন্দুদ্বয় সংস্থাপিত হইল এবং একটি সরলরেখাদ্বারা উহাদের সংযুক্ত করা হইল। অনুরূপে, ঐ একই একক লইয়া $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ ও $(0, -\frac{1}{2})$ বিন্দুদ্বয় স্থাপন করিয়া অপর একটি সরলরেখাদ্বারা উহাদের যুক্ত করা হইল। রেখা দুইটির নাম দেওয়া হইল যথাক্রমে AB ও CD এবং যে বিন্দুতে রেখাদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করিয়াছে তাহার নাম দেওয়া হইল P.

চাঁদার সাহায্যে মাপিয়া দেখা গেল যে AB ও CD রেখাদ্বারা P বিন্দুতে উৎপন্ন কোণগুলির প্রত্যেকটি এক সমকোণ। অতএব AB ও CD পরস্পর লম্ব।

প্রশ্নমালা 26

1. ছক কাগজে অক্ষদ্বয় ও মূলবিন্দু অঙ্কিত কর এবং এককের উল্লেখ করিয়া নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি স্থাপন কর :—
$(5, 7)$, $(-4, 6)$, $(8, -5)$, $(-7, -7)$, $(0, 9)$, $(9, 0)$, $(0, -6)$, $(-8, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$, $(-\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3})$ $(1\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$, $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$, $(1\frac{1}{3}, 0)$, $(0. -1\frac{1}{2})$

2. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি স্থাপন কর এবং মূলবিন্দু হইতে উহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর।
$(-3, 4)$, $(-6, -8)$, $(9, -12)$, $(-5, -12)$, $(\frac{5}{2}, 6)$.

3. নিম্নলিখিত দুই দুইটি বিন্দু স্থাপন করিয়া প্রত্যেক জোড়া বিন্দুকে একটি করিয়া সরল রেখাদ্বারা যুক্ত কর।
$(4, 0)$, $(0, 6)$; $(2, -8)$, $(-4, 6)$; $(-2, 7)$, $(4, 7)$; $(2, 6)$, $(-2, -6)$; $(0, 0)$, $(-5, 8)$;

4. $(4, 5)$ ও $(-8, -10)$ বিন্দু দুইটি স্থাপন কর এবং একটি সরলরেখা দ্বারা বিন্দু দুইটিকে যুক্ত করিয়া দেখাও যে ইহা একটি মূলবিন্দুগামী সরলরেখা।

5. $(-4, 9)$, $(2, 1)$ এবং $(8, -7)$ বিন্দু তিনটি স্থাপন কর এবং দেখাও যে প্রথম দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে বর্ধিত করিলে উহা তৃতীয় বিন্দুটি দিয়াও যায়।

6. $(4, 7)$ ও $(0, -7)$ বিন্দু দুইটি স্থাপন করিয়া একটি সরলরেখা দ্বারা উহাদের যুক্ত কর। $(-8, 5)$ ও $(8, -3)$ বিন্দু দুইটি স্থাপন করিয়া অপর একটি সরলরেখা দ্বারা উহাদের যুক্ত কর। রেখাদ্বয় যে বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিল সেই বিন্দুটির স্থানাঙ্ক কত নির্ণয় কর।

7. $(0, -7)$ এবং $(2, 0)$ বিন্দু দুইটি স্থাপন কর এবং একটি সরলরেখাদ্বারা বিন্দু দুইটিকে যুক্ত করিয়া সংযোজক সরল রেখাটিকে উভয় দিকে প্রসারিত করিয়া দাও। x-এর মান 4 হইলে y-এর মান কত হইবে এবং y-এর মান -14 হইলে x-এর মান কত হইবে ঐ লেখচিত্র হইতে তাহা নির্ণয় কর।

৪. $(-4, 9)$ ও $(8, -9)$ বিন্দু দুইটিকে স্থাপন করিয়া একটি সরলরেখা দ্বারা উহাদিগকে যুক্ত কর। সরলরেখাটি x-অক্ষ ও y-অক্ষকে যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিল তাহাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

110. সরল সমীকরণের লেখ অঙ্কন :

সংখ্যাসমূহকে জ্যামিতিক বিন্দুদ্বারা কিরূপে সূচিত করা যাইতে পারে তাহার বিশদ আলোচনা পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদগুলিতে করা হইয়াছে। এখন সরল সমীকরণকে কিরূপে লৈখিক চিত্রে প্রকাশ করা যায় তাহাই আলোচিত হইবে।

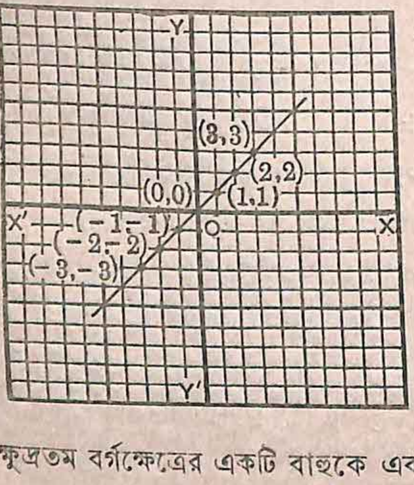
কোনও বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকিলে ছক কাগজে উহার নির্দিষ্ট স্থানটিতে সংস্থাপিত করা যায় ইহা তোমরা দেখিয়াছ। কিন্তু মনে কর কেহ তোমাকে (x, y) বিন্দুটি সংস্থাপিত করিতে বলিল। x ও y-এর পারস্পরিক সম্বন্ধ জানা না থাকিলে বিন্দুটিকে তুমি কোথায় স্থাপন করিবে? x ও y-এর মধ্যে বিশেষ সম্বন্ধটি কি তাহার উল্লেখ থাকিলে x-এর যে কোনও একটি নির্দিষ্ট মানের জন্য y-এরও একটি মান পাওয়া যাইবে। তখনই কেবল বিন্দুটিকে ছক কাগজে স্থাপন করা তোমার পক্ষে সম্ভব, হইবে, অন্যথা নয়।

যে-কোনও অক্ষর-সম্বলিত রাশিমালাকে উক্ত অক্ষরটির একটি অপেক্ষক (Function) বলে। $2x$, $3x+1$, $2x^2+5x+2$ প্রভৃতি রাশিমালার প্রত্যেকটি x-এর এক একটি অপেক্ষক। কোনও অপেক্ষকের অক্ষরকে উহার চল (Variable) বলে। উপরিউক্ত রাশি বা রাশিমালায় x একটি চলরাশি। x-এর কোনও অপেক্ষককে সংক্ষেপে $f(x)$ বা $\phi(x)$ লেখা হয়। $y = f(x)$ ধরিলে x ও y সমন্বিত একটি সমীকরণ পাওয়া যায়। মনে কর এইরূপ x ও y সমন্বিত একটি সমীকরণ তোমাকে দেওয়া হইল। উহাতে তুমি যদি x-এর স্থানে পরপর 1, 2, 3 ইত্যাদি মান বসাও

সমীকরণটি হইতে তুমি y-এর অনুরূপ কতকগুলি মান পাইবে। x-এর এক একটি মানকে ভুজ এবং y-এর অনুরূপ মানকে কোটি ধরিয়া ছক কাগজে তুমি কতকগুলি বিন্দু অঙ্কিত করিতে পার। এই বিন্দুগুলির মধ্যদিয়া একটি রেখা টানিলে যে রেখাটি পাওয়া যাইবে উহাকেই প্রদত্ত সমীকরণের লেখ বলে। এই রেখা সরল ও বক্র দুইই হইতে পারে। x ও y-ঘটিত একঘাত সমীকরণের লেখ সরলরেখাই হইয়া থাকে। এইস্থলে কেবলমাত্র একঘাত সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনের বিষয়ই আলোচিত হইবে। নিম্নের উদাহরণগুলি দেখ—

উদাহরণ 1. P একটি সচল বিন্দু। উহা এইরূপভাবে স্থান পরিবর্তন করিতেছে যে উহার গতিপথটি যেন x-অক্ষ ও y-অক্ষ হইতে সর্বদাই সমদূরবর্তী থাকে। P বিন্দুর সঞ্চার-পথ কি হইবে নির্ণয় কর। অর্থাৎ $y=x$ সমীকরণটির লেখ অঙ্কিত কর।

[কোনও বিন্দু এক বা একাধিক শর্ত পালন করিয়া গতিশীল হইলে তাহার গতিপথকে ঐ বিন্দুটির সঞ্চারপথ বলে।]



x ও y-এর অনুরূপ মানগুলিকে তালিকাবদ্ধ করিলে এইরূপ দাঁড়ায়—

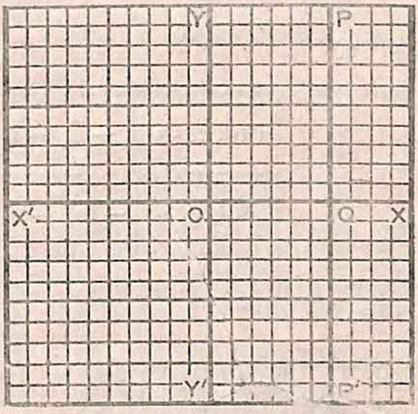
যখন, $x=\cdots\cdots-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\cdots$

তখন, $y=\cdots\cdots-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\cdots$

এখন XOX′ ও YOY′ অক্ষদ্বয় অঙ্কিত করিয়া এবং ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে একক ধরিয়া উপরিলিখিত বিন্দুগুলিকে

ছক কাগজে সংস্থাপিত করিলে এবং একটি সন্তত সরলরেখাদ্বারা ঐ বিন্দুগুলিকে যুক্ত করিলে পূর্ব্ব পৃষ্ঠায় প্রদত্ত চিত্রানুযায়ী $y=x$ সমীকরণটির একটি লেখ পাওয়া যাইবে। অতএব এই লেখই P বিন্দুর সঞ্চারপথ হইবে।

উদাহরণ 2. P একটি সচল বিন্দু। উহা এইরূপভাবে স্থান পরিবর্তন করে যে সকল অবস্থানেই উহার ভুজ তিন একক দীর্ঘ। P বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। অর্থাৎ $x=3$ সমীকরণটির লেখ অঙ্কিত কর।



এরূপ ক্ষেত্রে বুঝিতে হইবে y-এর মান 1, 2, 3 বা 4 একক যাহাই হউক না কেন x-এর মান সর্বদাই 3 একক হইবে। সুতরাং ছক কাগজে যথারীতি অক্ষদ্বয় অঙ্কিত করিয়া এবং ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে দৈর্ঘ্যের এককরূপে লইয়া OX-এর উপর 3 একক দূরে Q একটি বিন্দু লওয়া হইল। মাপনীর সাহায্যে Q বিন্দু দিয়া y-অক্ষের সমান্তরাল করিয়া PQP′ রেখাটি টানিলে ঐ রেখাটিই $x=3$ সমীকরণটির লেখ অর্থাৎ P বিন্দুর নির্ণেয় সঞ্চারপথ হইল।

দ্রষ্টব্য 1. সাধারণভাবে বলা যায় $x=a$ সমীকরণটির লেখ y-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা এবং এই রেখাটি x-অক্ষের উপরিস্থিত যে বিন্দুটি দিয়া যায় তাহা মূলবিন্দু হইতে a একক দূরে। আবার $y=b$ সমীকরণটির লেখ x-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা এবং এই রেখাটি y-অক্ষের উপরিস্থিত যে বিন্দুটি দিয়া যায় তাহা মূলবিন্দু হইতে b একক দূরে।

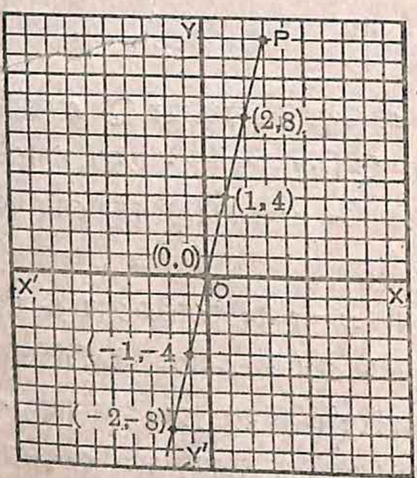
দ্রষ্টব্য 2. $x=0$ এর লেখ y-অক্ষরেখা এবং $y=0$ এর লেখ x অক্ষরেখা।

উদাহরণ 3, একটি গতিশীল বিন্দু এইরূপভাবে স্থান পরিবর্তন করিতেছে যে সকল অবস্থানে উহার ভুজ উহার কোটির এক-চতুর্থাংশ। ঐ গতিশীল বিন্দুটির সঞ্চারপথ কি হইবে নির্ণয় কর। অর্থাৎ $y=4x$ সমীকরণটির লেখ অঙ্কিত কর।

এ স্থলে x-এর পরিবর্তে ইচ্ছানুযায়ী কতকগুলি মান বসাইয়া y-এর অনুরূপ মানগুলি নির্ণয় করা হইল। যেমন,

যখন, $x=$	-2	-1	0	1	2
তখন, $y=$	-8	-4	0	4	8

ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া ছক কাগজে

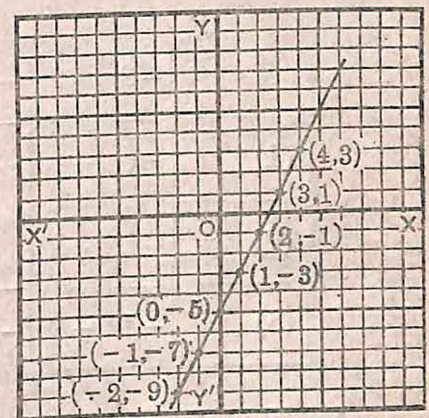


$(-2,-8)$, $(-1,-4)$, $(0, 0)$, $(1, 4)$, $(2, 8)$ বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া একখানা মাপনী নিয়া পরীক্ষা করিলে দেখা গেল যে কোনও দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাটি অপর বিন্দুগুলি দিয়াও যায়। বিন্দুগুলিকে একটি সন্তত সরলরেখাদ্বারা যুক্ত করিয়া ঐ রেখার উপর P একটি বিন্দু লওয়া হইল। চিত্র হইতে দেখা যায় উহার স্থানাঙ্ক $(3, 12)$ এবং এই স্থানাঙ্কের দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ

হয়। এইভাবে দেখান যাইতে পারে ঐ সরলরেখার উপর অবস্থিত সকল বিন্দুর ভুজ ও কোটি দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। কিন্তু ঐ রেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটি দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না। ইহা হইতেই প্রতিপন্ন হয় যে যে-সচল বিন্দুটির ভুজ ও কোটি $y=4x$ সমীকরণের দ্বারা সম্বদ্ধ OP সরলরেখাই উহার সঞ্চারপথ।

দ্রষ্টব্য 1. সাধারণভাবে বলা যায় m যে-কোনও ধ্রুবক সংখ্যা হইলে $y=mx$ এর লেখ মূলবিন্দুগামী একটি সরলরেখা হইবে।

দ্রষ্টব্য 2. যদি কোন ও সচলবিন্দুর যে-কোনও অবস্থানের ভুজ ও কোটিদ্বারা কোনও নির্দিষ্ট সমীকরণ সিদ্ধ হয় তবে ঐ সমীকরণের লৈখিক চিত্রই সচল বিন্দুটির সঞ্চারপথ হইবে।



উদাহরণ 4. একটি সচল বিন্দু এইরূপভাবে স্থান পরিবর্তন করে যে উহার ভুজ ও কোটি সর্বদা $y=2x-5$ সমীকরণটি দ্বারা সম্বদ্ধ। বিন্দুটির সঞ্চার-পথ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে দেখা যাইতেছে

যখন, $x=$	-2	-1	0	1	2	3	4
তখন, $y=$	-9	-7	-5	-3	-1	1	3

ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া $(-2, -9)$,

$(-1, -7)$, $(0, -5)$, $(1, -3)$, $(2, -1)$, $(3, 1)$, $(4, 3)$ বিন্দুগুলি স্থাপিত করা হইল। এই বিন্দুগুলিকে একটি সন্তত সরলরেখাদ্বারা যুক্ত করিলে যে সরলরেখাটি পাওয়া গেল উহাই সচল বিন্দুটির সঞ্চারপথ।

দ্রষ্টব্য 1. m ও c যে-কোনও ধ্রুবক সংখ্যা হউক না কেন, $y=mx+c$ সমীকরণের লেখ হইবে $(0, c)$ বিন্দুগামী একটি সরলরেখা।

উদাহরণ 5. নিম্নলিখিত সমীকরণ তিনটির লেখ অঙ্কিত কর।

(1) $y=2x$ (2) $y=2x+5$ (3) $y=2x-5$

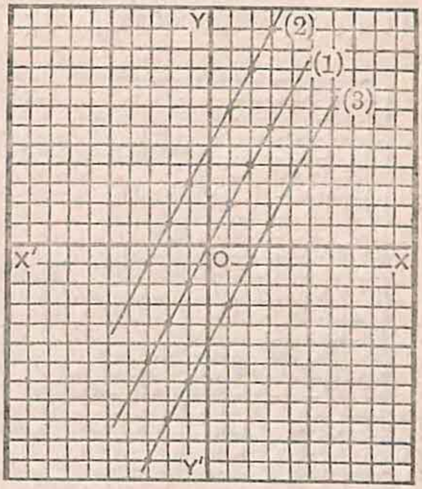
প্রদত্ত সমীকরণ তিনটির প্রত্যেকটির ক্ষেত্রে x ও y-এর অনুরূপ মানগুলি নির্ণয় করিয়া নিম্নলিখিতরূপে তালিকাবদ্ধ করা হইল।

	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
(1)	y	-6	-4	-2	0	2	4	6
(2)	y	-1	1	3	5	7	9	11
(3)	y	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1

ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে একক ধরিয়া (1), (2) ও (3) এর অন্তর্গত বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিয়া বিভিন্ন সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলিকে পৃথক পৃথক সন্তত রেখাদ্বারা যুক্ত করিলে দেখা গেল নির্ণেয় লেখ তিনটির প্রত্যেকটিই সরলরেখা এবং উহারা পরস্পর সমান্তরাল।

1 নং সমীকরণের লেখটি মূলবিন্দুগামী। 2 নং সমীকরণের লেখটি y-অক্ষকে $(0, 5)$ বিন্দুতে এবং 3নং সমীকরণের লেখটি y-অক্ষকে $(0, -5)$ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। সুতরাং সমীকরণটি $y=mx$ আকারের হইলে

উহার লেখ মূলবিন্দুগামী হয় এবং $y=mx+c$ আকারের হইলে উহার লেখ y-অক্ষকে $(0, c)$ বিন্দুতে ছেদ করে এ সম্পর্কে সংশয়ের কোনও অবকাশ রহিল না। কিন্তু রেখা তিনটি পরস্পর সমান্তরাল হইল কেন? সমীকরণটি $y=mx$ আকারেরই হউক বা $y=mx+c$ আকারেরই হউক x-অক্ষের উপরে উহাদের লৈখিক চিত্রের নতি (slope) নির্ভর করে m-এর মানের উপর। উপরের উদাহরণটিতে তিনটি সমীকরণের m-এর মানই 2; সুতরাং লেখ তিনটি x-অক্ষের উপর একই ভাবে নত হইয়া আছে বলিয়া সমান্তরাল হইয়াছে।



উদাহরণ 6. $y=3x+4$ এবং $y=2-\frac{1}{3}x$ এর লেখ অঙ্কিত কর এবং অঙ্কিত লেখ দুইটির অন্তর্ভূত কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে লেখদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে।

$y=3x+4$ সমীকরণটি হইতে পাওয়া যায়

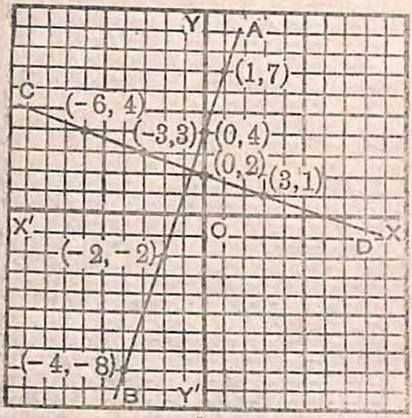
x	0	−2	−4	1
y	4	−2	−8	7

$y=2-\frac{1}{3}x$ সমীকরণটি হইতে পাওয়া যায়

x	0	−3	−6	3
y	2	3	4	1

ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরা হইল।

(i) (0,4), (−2, −2), (−4, −8), (1,7) বিন্দুগুলি প্রথম সমীকরণের লেখচিত্রের উপর অবস্থিত। উহাদিগকে স্থাপিত করিয়া একটি সরলরেখা AB দ্বারা উহাদিগকে সংযুক্ত করিয়া উভয়দিকে বর্ধিত করিয়া দেওয়া হইল। AB সরলরেখা প্রথম সমীকরণের লেখ।



(ii) (0,2), (−3,3), (−6,4), (3, 1) বিন্দুগুলি দ্বিতীয় সমীকরণের লেখচিত্রের উপর অবস্থিত। উহাদিগকে স্থাপিত করিয়া একটি সরলরেখা CD দ্বারা উহাদিগকে সংযুক্ত করিয়া উভয়দিকে বর্ধিত করিয়া দেওয়া হইল। CD সরলরেখা দ্বিতীয় সমীকরণের লেখচিত্র।

মনে কর AB, CD কে P বিন্দুতে ছেদ করে। চাঁদার সাহায্যে $\angle APC$ মাপিলে দেখিতে পাইবে $\angle APC = 90^\circ$; সুতরাং অপরাপর কোণগুলিও সমকোণ হইবে। অতএব AB ও CD রেখাদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে।

দ্রষ্টব্য 1. সমীকরণ দুইটি যদি $y = mx + c$ এবং $y = m'x + c'$ হয় এবং যদি $m \times m' = -1$ হয় তবে উহাদের লেখ দুইটির একটি অপরটির উপর লম্ব হয়।

উদাহরণ 7. $5x + 3y = 13$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

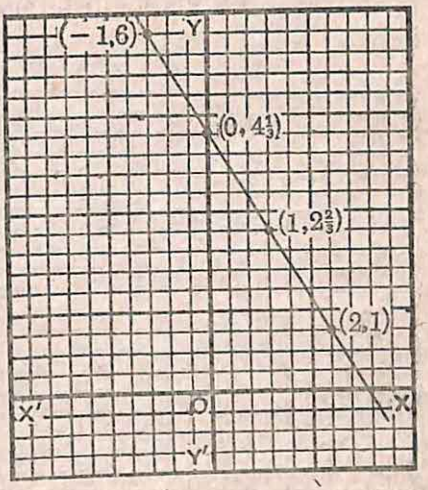
$$5x + 3y = 13 \quad \text{বা,} \quad 3y = 13 - 5x \quad \therefore \quad y = \frac{13 - 5x}{3}$$

এস্থলে,

যখন $x=$	-1	0	1	2
তখন $y=$	6	$4\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$	1

এখন ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর তিন গুণকে একক ধরিয়া $(-1,6)$, $(0, 4\frac{1}{3})$, $(1, 2\frac{2}{3})$, $(2, 1)$ বিন্দু তিনটি স্থাপন করা হইল।

স্পষ্টতঃই বিন্দু চারিটির প্রত্যেকটি নির্ণেয় লেখচিত্রের উপর অবস্থিত। একখানা মাপনীর সাহায্যে পরীক্ষা করিলে দেখা যাইবে বিন্দু চারিটির যে-কোনও দুইটির সংযোজক সরলরেখার উপর অপর দুইটি বিন্দু অবস্থিত। সুতরাং এই চারিটি বিন্দুর সংযোজক সরল-রেখাকে উভয়দিকে প্রসারিত করিলে যে অসীম সরলরেখাটি পাওয়া যাইবে তাহাই নির্ণেয় লেখ।



দ্রষ্টব্য 1. যেহেতু x, y সম্বলিত প্রত্যেক সরল সমীকরণকেই $y=mx+c$ আকারে প্রকাশ করা যায় অতএব সকল সরল সমীকরণের লেখই সরল রেখা হইবে।

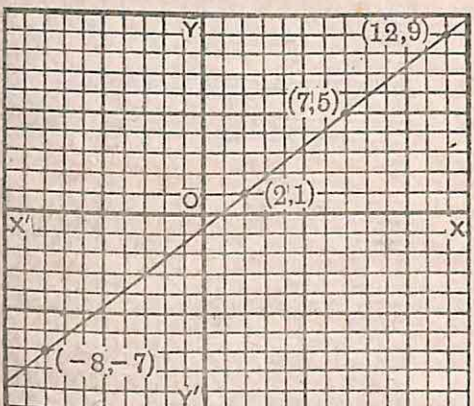
এই কারণে $y=mx+c$ অথবা $ax+by+c=0$ এইরূপ আকারের সমীকরণগুলিকে রৈখিক সমীকরণ (Linear equation) বলে।

দ্রষ্টব্য 2. যেহেতু $5x+3y=13$ সমীকরণটিকে $y=\dfrac{13-5x}{3}$ রূপে প্রকাশ করা যায় এবং যেহেতু $y=\dfrac{13-5x}{3}$ সমীকরণটির লেখ এবং

$\frac{13-5x}{3}$ বীজগণিতীয় রাশির লেখ অভিন্ন, অতএব $5x+3y=13$ সমীকরণটির লেখকে $\frac{13-5x}{3}$ এই বীজগণিতীয় রাশির লেখও বলা যাইতে পারে।

উদাহরণ 8. $\frac{4x-3}{5}$ এই বীজগণিতীয় রাশিটির লেখ অঙ্কিত কর।

$\frac{4x-3}{5}$ এই বীজগণিতীয় রাশির লেখ এবং $y=\frac{4x-3}{5}$ এই সমীকরণটির লেখ অভিন্ন। সুতরাং এক্ষেত্রে $y=\frac{4x-3}{5}$ লিখিয়া লইয়া প্রাপ্ত সমীকরণটি হইতে x ও y-এর কয়েকটি মান যুগ্ম নির্ণয় করিতে হইবে এবং উহাদিগকে ছক কাগজে জ্যামিতিক বিন্দুর দ্বারা সূচিত করিয়া ঐ বিন্দুগুলিকে একটি সরলরেখা দ্বারা সংযুক্ত করিলে ঐ সংযোজক সরলরেখাটিই প্রদত্ত বীজগণিতীয় রাশির লেখ হইবে।



$y=\frac{4x-3}{5}$ সমীকরণটি হইতে পাওয়া যায়,

যখন,	$x=$	-8	2	7	12
তখন,	$y=$	-7	1	5	9

এখন, ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে একক ধরিয়া $(-8, -7)$, $(2, 1)$, $(7, 5)$, $(12, 9)$ বিন্দুগুলি সংস্থাপিত করা হইল। একখানা মাপনী লইয়া পরীক্ষা করিলে দেখা গেল ঐ বিন্দুগুলির যে-কোনও দুইটির সংযোজক সরলরেখার উপর অন্য বিন্দুগুলিও অবস্থিত। সুতরাং এই সরলরোখটিই প্রদত্ত বীজগণিতীয় রাশিটির লেখচিত্র।

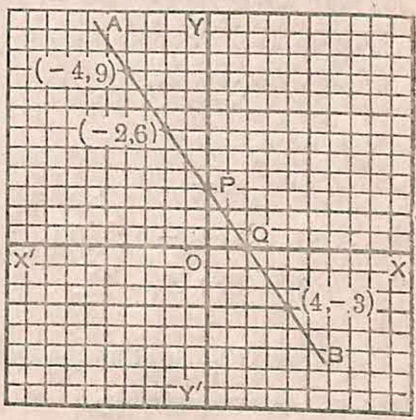
উদাহরণ 9. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ সমীকরণের লৈখিক চিত্র অঙ্কিত কর।

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \quad \text{বা,} \quad \frac{3x+2y}{6}=1 \quad \text{বা,} \quad 3x+2y=6$$

$$\text{বা,} \quad 2y=6-3x \qquad \therefore \quad y=\frac{6-3x}{2}$$

সমীকরণটি হইতে দেখা যাইতেছে

যখন $x=$	-4	-2	4
তখন $y=$	9	6	-3



ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া $(-4, 9)$, $(-2, 6)$, $(4, -3)$ বিন্দুগুলি স্থাপিত করা হইল এবং একটি সরলরেখা AB দ্বারা বিন্দুগুলি সংযুক্ত করা হইল। মনে কর AB সরলরেখা y-অক্ষকে P বিন্দুতে এবং x-অক্ষকে Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 3)$, Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, 0)$। উভয় বিন্দুর স্থানাঙ্কের দ্বারাই

সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। এইরূপে দেখান যায় A B সরলরেখার যে-কোনও বিন্দুর স্থানাঙ্কের দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় এবং বাহিরের কোনও বিন্দুর স্থানাঙ্কের দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না। অতএব উভয় দিকে প্রসারিত AB সরলরেখাই নির্ণেয় লেখ।

দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয়।

উদাহরণ 10. $(2,1)$ এবং $(3,-\frac{1}{3})$ বিন্দু দুইটি দিয়া অঙ্কিত সরল রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর নির্ণেয় সমীকরণটি $y=mx+c.$

যেহেতু $(2,1)$ ও $(3,-\frac{1}{3})$ বিন্দু দুইটি সরলরেখার উপর অবস্থিত এই মান যুগ্মের প্রত্যেকটি দ্বারা $y=mx+c$ সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

অতএব, $1=2m+c\cdots\cdots(1)$

$-\frac{1}{3}=3m+c\cdots\cdots(2)$

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া, $m=-\frac{4}{3}$

সমীকরণ (2)-এ m-এর মান বসাইয়া, $-\frac{1}{3}=-4+c$

$\therefore \quad c=\frac{11}{3}.$

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ—

$y=-\frac{4}{3}x+\frac{11}{3}$

বা, $3y=-4x+11$

বা, $4x+3y=11.$

সরল সমীকরণের লেখ অঙ্কনের সময় নিম্নলিখিত বিষয়গুলি মনে রাখিবে।

1. প্রথমেই ছক কাগজে মূল বিন্দুটি সহ অক্ষদ্বয় অঙ্কিত করিয়া লইবে।

2. x-এর বিভিন্ন মানের জন্য y-এর অনুরূপ মানগুলি নির্ণয়ের পূর্বে

প্রদত্ত সমীকরণটি যে আকারেরই হউক তাহাকে $y=mx+c$ আকারে পরিবর্তিত করিয়া লইবে। ইহাতে ঐ মানগুলি নির্ণয় করিতে সুবিধা হয়।

3. সমীকরণটি হইতে x ও y-এর ন্যূনপক্ষে এইরূপ তিনটি মানযুগ্ম নির্ণয় করিবে যাহাদের দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। যে-কোনও দুইটি বিন্দুকে একটি সরলরেখা দ্বারা সর্বদাই যুক্ত করা যায়। সুতরাং দুইটি মাত্র বিন্দু লইয়া লেখ অঙ্কন করিলে বিন্দুস্থাপন শুদ্ধ হইয়াছে কিনা বুঝিবার উপায় নাই।

4. মানযুগ্ম নির্ণয় কালে x-এর যে-সব মান ধরিলে y-এর মান ভগ্নাংশযুক্ত হয়, সম্ভব হইলে সেই সব মান বর্জন করিবে। বর্জন করা সম্ভব না হইলে ভগ্নাংশগুলিকে পূর্ণসংখ্যায় প্রকাশ করিবার উদ্দেশ্যে প্রয়োজনমত ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দ্বিগুণ, তিনগুণ বা চারিগুণ ইত্যাদিকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিবে।

5. ছক কাগজে বিন্দুগুলি স্থাপন করিবার পর যে-কোনও দুইটি স্থাপিত বিন্দু একটি সরলরেখা দ্বারা যুক্ত করিয়া উহাকে বর্ধিত করিয়া দেখিবে উহা তৃতীয় বিন্দুটি দিয়াও যায় কিনা, বিন্দু তিনটি এক সরলরেখায় না থাকিলে বুঝিবে স্থানাঙ্ক নির্ণয়ে অথবা উহার স্থাপনে কোথাও ভুল হইয়াছে। অতঃপর সংযোজক রেখাটি উভয়দিকে বর্ধিত করিবে। উভয় দিকে প্রসারিত এই সরলরেখাটিই প্রদত্ত সমীকরণের নির্ণেয় লেখ।

6. লেখচিত্রের পরিচয় দিবার সময় এককের উল্লেখ করিতে কদাচ ভুলিবে না।

7. মনে রাখিবে দুইটি অক্ষই যেমন অসীম পর্যন্ত প্রসারিত তোমার অঙ্কিত সরলরেখাটিও তেমনি অসীম পর্যন্ত প্রসারিত। তুমি যেটুকু অঙ্কন করিলে তাহা সেই অসীম সরলরেখার খণ্ডিত অংশ মাত্র।

প্রশ্নমালা 27

(ক)

1. একটি গতিশীল বিন্দু এইরূপভাবে স্থান পরিবর্তন করে যে উহার ভুজের দ্বিগুণ সর্বদাই যেন উহার কোটি অপেক্ষা 5 বেশী হয়। গতিশীল বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

2. একটি সচল বিন্দু এইরূপভাবে স্থান পরিবর্তন করে যে x-অক্ষ হইতে উহার যে দূরত্ব তাহার তিন গুণের সহিত 4 যোগ করিলে ঐ যোগফল y-অক্ষ হইতে উহার দূরত্বের দ্বিগুণের সমান হয়। বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

3. একটি সচল বিন্দু এইরূপভাবে স্থান পরিবর্তন করে যে পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত দুইটি স্থির রেখা হইতে উহার ব্যবধানের সমষ্টি সর্বদাই যেন 10 হয়। বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত স্থির রেখা দুইটিকে অক্ষদ্বয় ধর।]

4. একটি গতিশীল বিন্দু এইরূপভাবে স্থান পরিবর্তন করিতেছে যে y-অক্ষ হইতে উহার ব্যবধান সর্বদাই যেন 7 একক হয়। বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

5. একটি সচল বিন্দু এইরূপভাবে স্থান পরিবর্তন করে যে উহার ভুজ ও কোটি সর্বদা $y=-6x+9$ সমীকরণটি দ্বারা পরস্পর সম্বন্ধ। বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

(খ)

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লেখ অঙ্কিত কর :

1. (i) $x=5$; (ii) $x=-5$;
   (iii) $y=3$; (iv) $y=-3$;
2. (i) $x+7=0$; (ii) $x-7=0$;
   (iii) $y+5=0$; (iv) $y-5=0$,
3. (i) $x=y$; (ii) $2y=3x$;
   (iii) $2x=3y$; (iv) $4x=y$;
4. (i) $x+y=5$; (ii) $x-y=5$;
   (iii) $5x-3y=0$; (iv) $2x+3y=12$;

5. (i) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$; (ii) $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$;

(iii) $\frac{x+2}{2}=y$; (iv) $\frac{3y+6}{4}=x$;

নিম্নলিখিত বীজগণিতীয় রাশিগুলির লেখ অঙ্কন কর :

6. (i) $4x$; (ii) $\frac{3}{4}x$; (iii) $2x-3$;

(iv) $x+7$; (v) $\frac{2x+1}{3}$; (vi) $\frac{3x-4}{2}$;

(vii) $\frac{5-4x}{3}$; (viii) $\frac{5x+6}{4}$

7. $4x+5y=20$ সমীকরণটির লেখ অঙ্কন কর। ঐ লেখ x-অক্ষ ও y-অক্ষকে যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

8. $y=3x+4$ এবং $y=3x-9$ সমীকরণ দুইটির লেখ অঙ্কন করিয়া দেখাও যে উহারা পরস্পর সমান্তরাল হইয়াছে। কখন দুইটি লেখ পরস্পর সমান্তরাল হয় ?

9. $x+y=8$ এবং $y=x-4$ সমীকরণদ্বয়ের লেখ অঙ্কন করিয়া দেখাও যে লেখ দুইটি পরস্পর লম্ব হইয়াছে। কখন দুইটি লেখ পরস্পর লম্ব হয় ?

10. একই অক্ষরেখা এবং একই একক লইয়া, নিম্নলিখিত সমীকরণ দুইটির লেখচিত্র অঙ্কিত কর :

(i) $y=2x-6$; (ii) $y=x+1$; লেখচিত্র হইতে ঐ চিত্রদ্বয়ের ছেদবিন্দুর ভুজ ও কোটি নির্ণয় কর।

11. নিম্নলিখিত বিন্দুযুগ্মের মধ্য দিয়া অঙ্কিত সরলরেখা সমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর :—

(i) (0, 0), (6,7) ; (ii) (0,4), (6,0) ; (iii) (4, −7), (−2,8) ;

(iv) (−6, −7), (5,4) ;

12. দেখাও যে (3, −4), (6,0) ও (9,4) বিন্দু তিনটি সমরেখ। ঐ সরল রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1

1. $15-x$ 2. $y-5$; $y+5$ 3. $(12+x)$ বৎসর
4. ab বর্গমিটার 5. $(60-n)$ টি লেবু 6. $\frac{25}{n}$
7. $100y$ পয়সা 8. xy সংখ্যক সন্দেশ 9. $\frac{n}{p}$ টি মার্বেল
10. $\frac{y}{x}$ দিস্তা 11. $(x-y)$ কি. গ্রা. 12. $p-1, p+1$
13. $\frac{(y-n)}{x}$ টি আম 14. $(y+x+n)$ বৎসর 15. $\frac{x-z}{y}$
16. $s=\frac{1}{2}bh$ 17. $\frac{q}{p}$ ঘণ্টা 18. $\left(\frac{s}{u}+\frac{s}{v}\right)$ ঘণ্টা
19. $(20x-10y)$ টাকা 20. $10x+y$; 54 21. $100x+10y+z$
22. (a) $10x+z$ (b) $10z+x$ (c) $100y+z$

প্রশ্নমালা 2

1. 5 মিটার 2. 7ঘ. 30 মি. 3. 25 টা. ক্ষতি, 32 মি. উচ্চতা
486 টা. আয় 4. $+93$ 5. -30
(a) দৈনিক -15 টা. ব্যয়, (b) -200 টা. ক্ষতি, (c) মধ্যাহ্নের -2 ঘ. পরে ; (d) নব ব্যারাকপুর হইতে -10 মাইল দক্ষিণে, (e) বাজারে গমের দাম -1 টা. কম।

প্রশ্নমালা 3

1. 32	2. 2	3. 8	4. 2
5. 8	6. 64	7. 1	8. 16
9. $\frac{1}{4}$	10. 32	11. 2	12. 64
13. 10	14. 34	15. 170	16. 32
17. 352	18. 35	19. 23	20. 136

প্রশ্নমালা 4

1. 216 2. 3600 3. 11460
4. 1024 5. 776 6. (i) 9 (ii) 8 (iii) 1
(iv) 3 (v) 2 (vi) 27 (vii) 8 7. 12
8. 10 9. 32 10. 264
11. 8 12. 36 13. (i) 14 (ii) 106 (iii) 44
14. 3420 16. 9 17. 6, 9, 6, 9 ;
প্রথম ও তৃতীয়টি সমমাত্র এবং দ্বিতীয় ও চতুর্থটি সমমাত্র।
18. (i) ষষ্ঠ মানের (ii) অষ্টম মানের।

প্রশ্নমালা 5

1. 350 টাকা 2. 80 ; 55 3. −100 মিটার
4. 900 মিটার 5. +2 6. +7
7. −1 8. 79 9. −15
10. 73·5 11. 5 মিনিট স্লো।

প্রশ্নমালা 6

1. (i) −40 (ii) −105 (iii) +128 2. −12
3. 864 4. −19 5. +19
6. 68 7. −3680 8. (i) −4 (ii) −3 (iii) +5
9. 1 10. 5 11. $-\frac{7}{48}$ 12. $1\frac{1}{8}$
13. −12 14. 8 ; −26 15. $6\frac{17}{35}$
16. $+\frac{3}{10}$

প্রশ্নমালা 7

1. $2x$ 2. $2z$ 3. $a+b$
4. 0 5. $3x$ 6. $a-b$
7. x 8. $x+y$ 9. $5b-4a$
10. 1 11. 72 12. 19

13. $a-(b-c)+(-d+e)-f$

14. (i) $-\{-a+b-c\}-\{-d-e+f\}$, (ii) $-\{-a-(-b+c)\}$
$-\{-d-(e-f)\}$

15. (i) $a-[b+c-d+e+f]$ (ii) $a-[b+\{c-d+e+f\}]$
(iii) $a-[b+\{c-(d-e-f)\}]$ $a-[b+\{c-(d-\overline{e+f})\}]$

প্রশ্নমালা 8

1. $20a$ 2. $19p$ 3. $15xy$ 4. $-11ab$
5. $-18mn$ 6. $-20bc$ 7. $2x-y$ 8. $4x-z$
9. $13ab-5bc-ac+11$ 10. $13xy+18yz+16zx$
11. $12x^4+8x^2y^2+12y^4$ 12. $ax+by+cz$
13. $2\frac{17}{60}a+2\frac{1}{10}b+\frac{53}{60}c$; 23 ; 14. 0
15. $x^3+x^2y+xy^2+y^3$ 16. $abx+bcy+caz$ 17. 0
18. $a^4+a^3b+ab^3+b^4$ 19. 0 20. $2ab+3bc+4ca$
21. $7x$ 22. 400 23. 49 24. 4 25. 15
29. $2by$; $4by$; 30. $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$; 1.

প্রশ্নমালা 9

1. $3x$ 2. $5ab$ 3. $30pq$ 4. $-14xyz$
5. $40abxy$ 6. $x+4$ 7. $5p-6q$ 8. $-4a+14b$
9. $9a+3b-2c$ 10. $5x^3-5x^2+19x-5$ 11. $p+q+r$
12. $2xy+8yz-2zx$ 13. $9a^2b^2-9b^2c^2+9c^2a^2$
14. $-2a^2x^2+8b^2y^2+14b^2z^2$
15. $30a^4+10a^3b+20a^2b^2-13b^4$ 16. $\frac{1}{8}a^4+\frac{1}{2}a^2b^2$
17. $2x^2yz-4xy^2z+2xyz^2$
18. $a^3+1\frac{2}{7}a^2b-2\frac{7}{24}ab^2-2\frac{16}{117}b^3$ 19. $a^3+b^3+c^3-9abc$
20. $7p^2+q^2+8r^2-2pqr$ 22. $6a^4bc+16ab^4c+5abc^4$
23. $a^3+b^3+c^3$ 24. z^2x^2 25. 0

প্রশ্নমালা 10

1. $12xy^2$; $-28x^2y$; $18a^2b^2$
2. $-15abcd$; $24a^5b^3$; $-15m^3n^3$
3. $-24m^6n^7$; $6x^3y^3$; $98x^7y^7z^7$
4. $48m^6n^5p^6$; $-80a^5b^7x^5y^8$
5. $-4x^3y^3$; $4x^3y^3$; $-4x^3y^3$ 6. a^{12} ; x^{23} ; $-p^5q^6$
7. $-12a^3b^3$; $24a^4b^4$; $12a^{x+y}b^{x+y}$ 8. $-a^2b^2c^2$
9. $-60x^6$; 10. $-24a^4x^4$; 11. $24a^4b^4c^4$;
12. $6a^2b^2c^2x^4y^4z^4$; 13. $60p^6q^6r^6$; 14. $-x^{24}a^{14}$
15. $625\ a^{94}$

প্রশ্নমালা 11

1. p^2-pq 2. $x^2y^2z-xy^2z^2$ 3. $-32p^2q^2r+40pq^2r^2$
4. $a^6b^5-a^5b^6$ 5. $12a^2b-15ab^2-21abc$
6. $-20abc+24b^2c-12bc^2$ 7. $6a^2b^2c+6ab^2c^2+6a^2bc^2$
8. $12x^3y^2+16x^3y^3-4x^2y^3$ 9. $-6a^4b^2+15a^3b^3+21a^2b^4$
10. $-3x^5y^2+9x^4y^3+9x^3y^4+3x^2y^5$
11. $64x^7y^3-72x^6y^6-120x^8y^7+80x^6y^5$
12. $3m^8n^2-9m^6n^4+9m^4n^6-3m^2n^8$
13. $-4x^4y^2+\frac{1}{5}x^2y^4$ 14. $20a^2bc-15ab^2c-12abc^2$
15. $-\frac{1}{2}a^4x^2+\frac{3}{2}a^3x^3+a^2x^4$ 16. 0 17. $2x$
18. $2b^4c^4$ 19. y^4

প্রশ্নমালা 12

1. a^2-b^2 ; $6a^2+17a+12$
2. $20a^2-7a-40$; $30p^2-61p+30$
3. $x^2-ax-bx+ab$; $x^2y^2+x^2yz-xy^2z-xyz^2$
4. $6a^4+5a^2xy-6x^2y^2$; x^2+xz-y^2-yz
5. x^3-1 ; a^6+b^6
6. $4a^3-6a^2b+27b^3$ 7. $y^4+2y^3-2y^2+2y-3$

8. a^4-b^4 9. $4m^4-17m^3-m^2+25$ 10. $32a^5-b^5$
11. $\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{27}b^3$ 12. a^3m+b^3n 13. 0 14. $16a^2$
15. 0 16. $2a^3$ 17. a^4-b^4 18. $a^3-9a^2+26a-24$
19. x^8-1 20. $16m^4-81n^4$

প্রশ্নমালা 13

1. $2x^2$ 2. $9x^3$ 3. $-3y$ 4. $4xy^2$
5. $-14a^4b^5c^3$ 6. $-15x^3za^5$ 7. $\frac{2}{3}xz^2$
8. $-\frac{6}{7}a^2b^5c^5x^4y^8z^6p^{12}$ 9. $x^{a-b}y^{b-c}z^{c-a}$
10. $-\frac{2}{3}a^{m-1}b^{n-2}c^{p-3}$ 11. $3(abcd)^{15-3n}$
12. $-2a^{10}b^4c^5x^2y^5z^9$ 13. $\frac{4}{17}a^5b^5c^5xy^2z^2$ 14. $6x^6$
15. $5a$ 16. abc 17. xy 18. $5x^2$
19. $2a^2b^2$ 20. p^2q^2

প্রশ্নমালা 14

1. $x+3$ 2. a^2-b^2 3. $p-3q$ 4. $by-ax$
5. $3x-2yz$ 6. $x^2-2xy+3y^2$ 7. $2m^2-3mn+4n^2$
8. $a^2-2ab+3b^2$ 9. $p^2-2pq+q^2$
10. $2x^3-3x^2y+4xy^2-5y^3$
11. $2a^4+3a^3b-4a^2b^2+5ab^3-6b^4$
12. $x^4y^2-2x^2y^4z^2-3z^4-4x^4z^2$
13. $p^4q^2-p^2r^4+q^4r^2-1$
14. $\frac{a}{d}np^2-\frac{b}{d}m^2p-\frac{c}{d}mn^2$ 15. $6xyz-4xy^3z^5+3x^2y^2z^2$
16. $6c-8b-10a$ 17. $4m^2-5my-6y^2+7$
18. $\frac{1}{3}x^2a^2b^3+\frac{1}{5}y^2a^4b^4-\frac{1}{7}xya^3b^2$ 19. $3a+4a^2b-5a^3b^3$
20. $7m^2n-4n^2p-5p^2m$

প্রশ্নমালা 15

1. $x^2+2xy+y^2$; $p^2+2pq+q^2$; $m^2+2mn+n^2$; $y^2+2yz+z^2$
2. a^2+6a+9 ; $25+10x+x^2$; $4a^2+4a+1$; $9x^2+12x+4$

3. $4x^2+12xy+9y^2$; $9b^2+12bc+4c^2$; $16p^2+40pq+25q^2$; $25m^2+60mn+36n^2$

4. $a^4+2a^2b^2+b^4$; $b^4+2b^2c^2+c^4$; $4p^4+12p^2q^2+9q^4$; $m^4+4m^2n^2+4n^4$

5. $4x^2y^2+20xy^2z+25y^2z^2$; $9y^2z^2+42xyz^2+49z^2x^2$; $16b^2c^2+24abc^2+9c^2a^2$; $4a^2x^2+12abxy+9b^2y^2$

6. $x^2+2+\frac{1}{x^2}$; $4y^2+2+\frac{1}{4y^2}$; $9p^2+4+\frac{4}{9p^2}$; $16m^2+\frac{m}{n}+\frac{1}{64n^2}$

7. 64 ; 144 ; 961 ; 10404 ; 1006009

8. $4a^2+9b^2+16c^2+12ab+24bc+16ca$;
$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xy^2z+2x^2yz+2xyz^2$;
$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2bcyz+2cazx$;
$p^4+q^6+r^8+2p^2q^3+2p^2r^4+2q^3r^4$

9. $m^2+4n^2+9p^2+16q^2+4mn+6mp+8mq+12np+16nq+24pq$;
$4a^2+9b^2+16x^2+25y^2+12ab+16ax+20ay+24bx+30by+40xy$

10. $16n^2$
11. $x^2+2xy+y^2$
12. $4p^2$
13. 36
14. 1000000
15. 625
16. 25
17. 16
18. 49
19. $\frac{25}{36}$
20. 17

প্রশ্নমালা 16

1. $4a^2-4ab+b^2$; $4m^2-12mn+9n^2$; $p^2-4pq+4q^2$; $4b^2-2bc+\frac{1}{4}c^2$; $4y^2-yz+\frac{1}{16}z^2$

2. $a^2b^2-2abcd+c^2d^2$; $a^2x^2-2abxy+b^2y^2$; $p^2q^2-2pq^2r+q^2r^2$; $4x^2y^2-12xy^2z+9y^2z^2$; $16m^2n^2-24mnpq+9p^2q^2$

3. $4x^4-12x^2y^2+9y^4$; $4p^4-12p^2q+9q^2$; $m^6-2m^3n^3+n^6$; $a^4b^4-2a^2b^4c^2+b^4c^4$, $\frac{1}{16}a^8-\frac{1}{8}a^4b^4+\frac{1}{16}b^8$

4. $x^2-2+\frac{1}{x^2}$; $4m^2-2+\frac{1}{4m^2}$; $9p^2-18+\frac{9}{p^2}$; $a^4-2+\frac{1}{a^4}$; $9a^6-2+\frac{1}{9a^6}$

5. 841 ; 2209 ; 9604 ; 39204 ; 998001

6. $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2ab^2c-2bc^2a-2ca^2b$; $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-2xy^2z+2yz^2x-2zx^2y$; $4p^2q^2+9q^2r^2+16r^2p^2-12pq^2r+24qr^2p-16rp^2q$

7. $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2ac-2ad-2bc-2bd+2cd$; $a^2+b^2+x^2+y^2-2ab+2ax-2ay-2bx+2by-2xy$; $m^2+n^2+p^2+q^2-2mn-2mp+2mq+2np-2nq-2pq$

8. 16   9. $9m^2$ 10. $36b^2y^2$

11. $4(a^2-2ab+b^2)$ 12. 1   13. ·25

14. 0   15. 36   16. 1

17. 9   20. (*i*) 132 (*ii*) 164   22. 2390

প্রশ্নমালা 17

1. $4x^2-9y^2$; $9x^2-16$ 2. $25x^2-4a^2$; $9m^2-16n^2$

3. $a^2x^2-b^2y^2$; $x^2y^2-y^2z^2$ 4. $4a^2b^2-9b^2c^2$; a^4-b^4

5. $4p^2-\frac{1}{4}q^2$; $x^2-\frac{4}{9}y^2$ 6. $a^{2x}-b^{2y}$, $1-x^{2a}y^{2a}$

7. $x^2+y^2-z^2+2xy$; $a^2-b^2-c^2-2bc$

8. $a^4+a^2b^2+b^4$; $x^2y^2-y^2z^2+z^2x^2+2x^2yz$

9. $a^8b^8+a^4b^4+1$ 10. x^4+y^4

11. a^8-1 12. x^8-y^8 13. $16p^4-81q^4$

14. x^8+x^4+1 15. $x^8+x^4y^4+y^8$ 16. a^8-b^8

17. 696   18. 1503800   19. 349340

20. 489964   21. 14   22. 1

23. $(2x+3y)(2x-3y)$ 24. $(4y+5z)(4y-5z)$

25. $(3a+6b)(3a-6b)$ 26. $(7b+9c)(7b-9c)$

27. $(6a+11)(6a-11)$ 28. $(8+5x)(8-5x)$

29. $(4x^2+9)(2x+3)(2x-3)$ 30. $(ab+cd)(ab-cd)$

31. $(x^2+25y^2)(x+5y)(x-5y)$

32. $(9a^2+16b^2)(3a+4b)(3a-4b)$

33. $(2a)^2-(a+b)^2$ 34. $(4p+2q)^2-(p+q)^2$

35. $\left(\frac{3x+5y}{2}\right)^2-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

প্রশ্নমালা 18

1. $4(x+2)$ 2. $c(a-b)$ 3. $ab(a+b)$
4. $3mn(2p-3q)$ 5. $x^2y^2(x-y)$ 6. $3a^2(a-5b)$
7. $x^2(2a-3b+4c)$ 8. $xyz(x+y+z)$ 9 $2m^2n^2(m-2+3n)$
10. $(a+b)(x+y+z)$ 11. $(x-y)(a-b)$
12. $a(x+z)$ 13. $(x-y)^2(2a+3b-c)$
14. $(ax+by+cz)(a+b+c)$ 15. $(m+n)(x+y)$
16. $(x+1)(y+1)$ 17. $(x+y)(a-b-c)$
18. $a(a+1)(a^2+1)$ 19. $(x-y)(x-z)$
20. $(am^2-1)(m-1)$

প্রশ্নমালা 19

1. $(2a+3b)^2$ 2. $(x-12)^2$ 3. $(1-4a)^2$
4. $(4x^2-3y^2)^2$ 5. $(3xy+2z)^2$ 6. $(5-4x^2)^2$
7. $(pm-qn)^2$ 8. $(4a^3+5b^3)^2$ 9. $(x+y+4)^2$
10. $(ax+by-cz)^2$ 11. $(3x-3y+2z)^2$ 12. $(x^3-2xz)^2$
13. $(3a^3-5b^3)^2$ 14. $(p^2-mn)^2$
15. $(ax-ay+bx+by)^2$

প্রশ্নমালা 20

1. $(x+4y)(x-4y)$ 2. $(3x+5y)(3x-5y)$
3. $(12+8a)(12-8a)$ 4. $(9x^2+1)(3x+1)(3x-1)$
5. $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$ 6. $(4x^2+5y^2)(4x^2-5y^2)$
7. $(5ab+6cd)(5ab-6cd)$ 8. $(5+a+b+c)(5-a-b-c)$

9. $(a-c)(a-2b+c)$ 10. $4y(x+z)$
11. $(x-3y)(3x+y-2z)$ 12. $(a+9a^3)(a-9a^3)$
13. $(x+2y-3z)(x-2y+3z)$ 14. $(x+y)(x-y)^3$
15. $4x(x+6y)(x-6y)$ 16. $(3x+3y+4)(3x+3y-4)$
17. $(a+3b-2c)(a-b+2c)$ 18. $11(x-3y)(25x+9y)$
19. $(ab-ac+bc-bd)(ab-ac-bc+bd)$
20. $(7x^3+8x^2)(7x^3-8x^2)$ 21. $3a^2(3a+2b)(3a-2b$
22. $2pq(6pq^2+7)(6pq^2-7)$ 23. $(a^n+b^n)(a^n-b^n)$
24. $(a+b+c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)$
25. $(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$

প্রশ্নমালা 21

1. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ 2. $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$
3. $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$ 4. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
5. $(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$
6. $(x^2+xy+2y^2)(x^2-xy+2y^2)$
7. $(a+b-c)(a-b+c)$
8. $(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^4-a^2+1)$
9. $(c+a-b)(c-a+b)$
10. $(x+1-a)(x-1+a)$
11. $(6a+ab-5b)(6a-ab-5b)$
12. $(2x^2+10ax+25a^2)(2x^2-10ax+25a^2)$
13. $(4a-b+3c)(4a-b-3c)$
14. $(a^2-2b^2+1)(a^2-2b^2-1)$
15. $(x+2y+z)(x-z)$
16. $(ax+by+ay-bx)(ax+by-ay+bx)$
17. $(c+d+a-b)(c+d-a+b)$ 18. $(x+y)^3(x-y)$
19. $3(a^2+2ab-b^2)(a^2-2ab-b^2)$
20. $(3a+2b-4c+1)(3a-2b-4c-1)$

প্রশ্নমালা 22

1. 39 2. ·14 3. 20 4. 24
5. 72 6. 60 7. 40 8. 15
9. 5 10. 2 11. A 150 টাকা, B 100 টাকা এবং C 50 টাকা

12. প্রত্যেকে 16 টাকা হিসাবে 3 জন স্ত্রীলোক 48 টাকা এবং প্রত্যেকে 48 টাকা হিসাবে 2 জন পুরুষ 96 টাকা,

13. যে থলিতে 25-পয়সা মুদ্রা আছে তাহাতে 5 টাকা এবং যে থলিতে 10-পয়সা মুদ্রা আছে তাহাতে 4 টাকা আছে ;

14. পিতার বয়স 45 বৎসর এবং পুত্রের বয়স 15 বৎসর ; 15. 32

প্রশ্নমালা 23

1. 50 2. 1 3. 168 4. 14, 16, 18
5. 35 বৎসর 6. 12 টাকা 7. 125 8. 33, 35, 37
9. কাকাতুয়া 3টি এবং ময়না 5টি 10. 25 বৎসর
11. 225 টাকা 12. 62 ও 28 13. 85 টাকা
14. প্রথম অংশ 48, দ্বিতীয় অংশ 36 ও তৃতীয় অংশ 12
15. A 50 টাকা, B 20 টাকা, C 10 টাকা।

প্রশ্নমালা 24

1. 20 2. 3 3. 70 ও 30 4. 1 5. 8 ও 5
6. 27 ও 18 7. 30 8. 130 ও 110 9. 36 ও 24
10. পিতার বয়স 35 বৎসর, পুত্রের বসয় 5 বৎসর।
11. 14 বৎসর 12. 20 ও 40 13. 33, 35
14. 63 15. 90টি আপেল আছে।

প্রশ্নমালা 25

1. 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর যে কোনও রাশি
2. 4 অপেক্ষা বৃহত্তর " " "
3. 3 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর " " "
4. $-\frac{1}{2}$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর যে কোনও রাশি

9. $(a-c)(a-2b+c)$ 10. $4y(x+z)$
11. $(x-3y)(3x+y-2z)$ 12. $(a+9a^3)(a-9a^3)$
13. $(x+2y-3z)(x-2y+3z)$ 14. $(x+y)(x-y)^3$
15. $4x(x+6y)(x-6y)$ 16. $(3x+3y+4)(3x+3y-4)$
17. $(a+3b-2c)(a-b+2c)$ 18. $11(x-3y)(25x+9y)$
19. $(ab-ac+bc-bd)(ab-ac-bc+bd)$
20. $(7x^3+8x^2)(7x^3-8x^2)$ 21. $3a^2(3a+2b)(3a-2b$
22. $2pq(6pq^2+7)(6pq^2-7)$ 23. $(a^n+b^n)(a^n-b^n)$
24. $(a+b+c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)$
25. $(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$

প্রশ্নমালা 21

1. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ 2. $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$
3. $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$ 4. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
5. $(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$
6. $(x^2+xy+2y^2)(x^2-xy+2y^2)$
7. $(a+b-c)(a-b+c)$
8. $(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^4-a^2+1)$
9. $(c+a-b)(c-a+b)$
10. $(x+1-a)(x-1+a)$
11. $(6a+ab-5b)(6a-ab-5b)$
12. $(2x^2+10ax+25a^2)(2x^2-10ax+25a^2)$
13. $(4a-b+3c)(4a-b-3c)$
14. $(a^2-2b^2+1)(a^2-2b^2-1)$
15. $(x+2y+z)(x-z)$
16. $(ax+by+ay-bx)(ax+by-ay+bx)$
17. $(c+d+a-b)(c+d-a+b)$ 18. $(x+y)^3(x-y)$
19. $3(a^2+2ab-b^2)(a^2-2ab-b^2)$
20. $(3a+2b-4c+1)(3a-2b-4c-1)$

প্রশ্নমালা 22

1. 39 2. ·14 3. 20 4. 24
5. 72 6. 60 7. 40 8. 15
9. 5 10. 2 11. A 150 টাকা, B 100 টাকা এবং C 50 টাকা
12. প্রত্যেকে 16 টাকা হিসাবে 3 জন স্ত্রীলোক 48 টাকা এবং প্রত্যেকে 48 টাকা হিসাবে 2 জন পুরুষ 96 টাকা,
13. যে থলিতে 25-পয়সা মুদ্রা আছে তাহাতে 5 টাকা এবং যে থলিতে 10-পয়সা মুদ্রা আছে তাহাতে 4 টাকা আছে ;
14. পিতার বয়স 45 বৎসর এবং পুত্রের বয়স 15 বৎসর ; 15. 32

প্রশ্নমালা 23

1. 50 2. 1 3. 168 4. 14, 16, 18
5. 35 বৎসর 6. 12 টাকা 7. 125 8. 33, 35, 37
9. কাকাতুয়া 3টি এবং ময়না 5টি 10. 25 বৎসর
11. 225 টাকা 12. 62 ও 28 13. 85 টাকা
14. প্রথম অংশ 48, দ্বিতীয় অংশ 36 ও তৃতীয় অংশ 12
15. A 50 টাকা, B 20 টাকা, C 10 টাকা।

প্রশ্নমালা 24

1. 20 2. 3 3. 70 ও 30 4. 1 5. 8 ও 5
6. 27 ও 18 7. 30 8. 130 ও 110 9. 36 ও 24
10. পিতার বয়স 35 বৎসর, পুত্রের বয়স 5 বৎসর।
11. 14 বৎসর 12. 20 ও 40 13. 33, 35
14. 63 15. 90টি আপেল আছে।

প্রশ্নমালা 25

1. 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর যে কোনও রাশি
2. 4 অপেক্ষা বৃহত্তর " " "
3. 3 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর " " "
4. $-\frac{1}{2}$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর যে কোনও রাশি

5. 1 অপেক্ষা বৃহত্তর " " "
6. $1\frac{1}{2}$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর " " "
7. 2 এবং 2 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর যে কোনও রাশি
8. 1 এবং 1 অপেক্ষা বৃহত্তর " " "
9. 11 অপেক্ষা বৃহত্তর " " "
10. 20 বা 20 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর যে কোনও রাশি
11. অজয়ের নিকট 4টি, 5টি বা 6টি মার্বেল থাকিতে পারে।
12. খাতার সংখ্যা 6 বা 7
13. বড় জামাটির সর্বোচ্চ মূল্য 20 টাকা এবং সর্বনিম্ন মূল্য 13 টাকা
14. সমীর 33 রাণ এবং শ্যামল 49 রাণ করিয়াছিল।
15. সংখ্যা যুগল 23 ও 46, 24 ও 47 বা 25 ও 48 হইতে পারে।

প্রশ্নমালা 26

2. 5 একক, 10 একক, 15 একক. 13 একক, 6·5 একক ;
6. ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 0),
7. $x=4$ হইলে $y=7$ হইবে, $y=-14$ হইলে $x=2$ হইবে।
8. x-অক্ষকে (2, 0) বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে (0, 3) বিন্দুতে ছেদ করিবে।

প্রশ্নমালা 27

(খ)

7. x-অক্ষকে (5, 0) বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে (0, 4) বিন্দুতে ছেদ করে।

8. উভয় সমীকরণের 'm' (এক্ষেত্রে 3) একই সংখ্যা বলিয়া লেখদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হইয়াছে।

9. সমীকরণ দুইটি যদি $y=m_1x+c_1$ এবং $y=m_2x+c_2$ হয় এবং যদি $m_1\times m_2=-1$ হয় তবে উহাদের লেখ দুইটির একটি অপরটির উপর লম্ব হয়।

10. ছেদ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (7, 8)

11. (i) $6y-7x=0$, (ii) $3y+2x=0$, (iii) $2y+5x=6$,
(v) $x+y+1=0$;

12. $4x-3y=24$.

জ্যামিতি

উপক্রমণিকা

জ্যামিতিতে নূতন দৃষ্টিভঙ্গির উদ্দেশ্য :

পৃথিবী বৈচিত্র্যময়। চারিদিকে তাকাইয়া আমরা বিভিন্ন আকার এবং আকৃতির বস্তু দেখিতে পাই। ঐ সকল বস্তুর যথার্থ চিত্র অঙ্কন করিতে হইলে বিন্দু, রেখা, তল ইত্যাদি সম্পর্কে নির্ভুল ধারণা থাকা প্রয়োজন। গণিতশাস্ত্রে এই শব্দগুলির কোন গাণিতিক সংজ্ঞা নাই, তবুও প্রথম শিক্ষার্থীদের নিকট এই বিষয়গুলি সম্পর্কে মোটামুটি সঠিক ধারণা সৃষ্টি করার জন্য বিন্দু, রেখা এবং তলের একপ্রকার সংজ্ঞা দেওয়া হয়। যেমন, যাহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ বা উচ্চতা কিছুই নাই, শুধুমাত্র অবস্থান আছে তাহাকে **বিন্দু** বলা হয়। আবার যাহার দৈর্ঘ্য আছে, কিন্তু প্রস্থ বা উচ্চতা নাই তাহাকে **রেখা** বলে। এইবার একটু চিন্তা করিলেই বুঝিতে পারিবে যে যাহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ বা উচ্চতা কিছুই নাই তাহার বাস্তব অস্তিত্বই সম্ভব নয়। আবার শুধুমাত্র দৈর্ঘ্য আছে এরূপ বস্তুর বাস্তব অস্তিত্বও অসম্ভব। সুতরাং এই জাতীয় সংজ্ঞা উচ্চতর গণিতে প্রয়োগ করা যায় না। নিম্ন শ্রেণীতে ছাত্র-ছাত্রীরা যাহা শিখিবে তাহা অপরিবর্তিত অবস্থায় উচ্চতর জ্যামিতিতেও যাহাতে প্রয়োগ করা সম্ভব হয় সে কারণে প্রাথমিক পর্যায়ে বিন্দু, রেখা, তল, কোণ, ত্রিভুজের সর্বসমতা ইত্যাদির সহিত উচ্চতর জ্যামিতির ঐ একই বিষয়বস্তুগুলির সমন্বয় সাধনের প্রচেষ্টা চলিতেছে। প্রাথমিক জ্যামিতি এবং উচ্চতর জ্যামিতির মধ্যে অথবা গণিতের অন্যান্য শাখার সহিত জ্যামিতির সমন্বয় সাধনের মূল মাধ্যম হইল সেট্ এবং ম্যাপিং।

সেট্ এবং ম্যাপিং :

প্রাত্যহিক জীবনের বিভিন্ন পরিস্থিতিতে প্রায়শঃই আমাদিগকে বিভিন্ন প্রকারের বস্তু-সমষ্টির সংস্পর্শে আসিতে হয়। উদাহরণ স্বরূপ একগোছা চাবি, বিদ্যালয়ের সপ্তম শ্রেণীর ছাত্রবৃন্দ, একপ্রস্থ ক্রিকেট খেলার উপকরণ ইত্যাদির কথা ধরা যাক্। কোন চাবির গোছায় একটি নির্দিষ্ট কক্ষের চাবি আছে কিনা অথবা সপ্তম শ্রেণীর ছাত্রবৃন্দের মধ্যে কোন বিশেষ একজন ছাত্র আছে কিনা কোন সময়ে তাহা হয়তো তোমার অনুসন্ধানের প্রয়োজন হইয়া পড়িল। একই সঙ্গে কোন্ বিশেষ ধর্মের বলে কোন বিশেষ বস্তু নির্দিষ্ট বস্তু-সমষ্টির অন্তর্ভুক্ত হইবে সে সম্পর্কেও ওয়াকিবহাল হওয়া আবশ্যক হইতে পারে। যেমন মনে করা যাক্ তোমার কোন নির্দিষ্ট কক্ষের চাবি দরকার। এই ব্যাপারে অনুসন্ধানের জন্য আলমারিগুলির জন্য নির্দিষ্ট চাবির গোছা খোঁজ করিলে চলিবে না। উপরের উদাহরণে চাবির গোছা, সপ্তম শ্রেণীর ছাত্রবৃন্দ, একপ্রস্থ ক্রিকেট খেলার উপকরণ প্রভৃতি এক একটি সেট্। অতএব, নিদিষ্ট ধর্ম সাপেক্ষে যে কোন সংখ্যক বস্তুর সমাহার বা সমন্বয়কে সেট্ বলা যাইতে পারে। সেটের অন্তর্গত প্রত্যেকটি বস্তুকে ঐ সেটের এক একটি পদ বলা হয়। কোন একটি বিশেষ বস্তু একটি নির্দিষ্ট সেটের পদ হইবে কিনা তাহা ঐ বস্তুর বিশেষ কোন ধর্মের উপর নির্ভরশীল। সাধারণতঃ সেটকে A, B, C ইত্যাদি বড় হরফের ইংরাজী বর্ণের সাহায্যে এবং সেটের অন্তর্গত কোন পদকে a, b, c ইত্যাদি ছোট হরফের ইংরাজী বর্ণের সাহায্যে সূচিত করা হইয়া থাকে।

মনে করা যাক্ বোম্বাই, দিল্লী, কানপুর, মাদ্রাজ এবং কলিকাতা এই পাঁচটি নগরী লইয়া A সেট্, ব্যাঞ্জনবর্ণের প্রথম পাঁচটি অক্ষর

লইয়া B সেট্ এবং এক হইতে পাঁচ পর্যন্ত সংখ্যা পাঁচটি লইয়া C সেট্ গঠিত। গণিতশাস্ত্রে ইহা নিম্নোক্ত প্রকারে লেখা হইয়া থাকে—

A = { বোম্বাই, দিল্লী, কানপুর, মাদ্রাজ, কলিকাতা }

B = { ক, খ, গ, ঘ, ঙ }

C = { 1, 2, 3, 4, 5 }.

জ্যামিতিতে নির্দিষ্ট বিন্দু, রেখা, তল ইত্যাদিকে কোন সেটের পদ হিসাবে গণ্য করা হয়।

মনে কর, A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

এবং B = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 } দুইটি সেট।

এক্ষেত্রে লক্ষ্য করিলেই বুঝা যায় যে A সেটের প্রত্যেকটি পদ দ্বিগুণ করিলেই B সেটের পদগুলি পাওয়া যাইবে। এইরূপ নির্দিষ্ট নিয়ম অনুসারে গঠিত কোন প্রক্রিয়া যাহা দ্বারা কোন প্রদত্ত সেটের পদগুলি হইতে দ্বিতীয় কোন সেটের পদগুলি পাওয়া যায় তাহাকে ম্যাপিং বলা হয়। উপরোক্ত উদাহরণে A এবং B সেটের মধ্যে একটি ম্যাপিং করা যায় যাহার নিয়মটি হইল B-এর কোন পদ A-এর কোন-না-কোন পদের দ্বিগুণ। অনুরূপে মনে কর, দুইটি সেট্ যথাক্রমে

X = { 2, 3, 4, 5, 6 } এবং

Y = { 4, 9, 16, 25, 36 }.

এক্ষেত্রে X এবং Y সেটের মধ্যে একটি ম্যাপিং করা যায় যাহার নিয়মটি হইল X সেটের যে কোন পদের বর্গ Y সেটের একটি পদ।

সাবসেট্ ঃ

যদি কোন সেট্ A-এর প্রত্যেকটি পদ অপর একটি সেট্ B-এর কোন না কোন পদ হয়, তাহা হইলে A সেট্‌টিকে B সেটের সাবসেট বলা হয় এবং ইহাকে $A \subset B$ এইরূপ লেখা হয়।

মনে কর, X তোমাদের বিদ্যালয়ের সকল ছাত্র-ছাত্রীদের একটি সেট্ এবং Y ঐ বিদ্যালয়ের সপ্তম শ্রেণীর সকল ছাত্র-ছাত্রীদের একটি সেট্। সুতরাং এক্ষেত্রে Y সেট্‌টি X সেটের একটি সাবসেট্ অর্থাৎ $Y \subset X$.

আবার মনে কর, দুইটি সেট্ যথাক্রমে

$A = \{1, 4, 5\}$ এবং

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

এস্থলে $A \subset B$.

শূন্য গর্ভ সেট্ ঃ

পদবিহীন সেট্‌কে শূন্য গর্ভ সেট্ বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ তিনবাহু-বিশিষ্ট মানুষের কথা কল্পনা করা যাক্। যেহেতু পৃথিবীতে এইরূপ কোন মানুষের অস্তিত্ব নাই, সুতরাং তিনবাহু-বিশিষ্ট মানুষদের লইয়া সেট্ গঠিত হইলে তাহা একটি শূন্য গর্ভ সেট্ হইবে।

যোগ সেট্ ঃ

মনে কর, X এবং Y যে কোন দুইটি সেট্। যদি কোন সেটের প্রত্যেকটি পদ X বা Y সেটের পদ হয় কিংবা X এবং Y উভয় সেটেরই পদ হয়, তাহা হইলে সেই সেট্‌টিকে X এবং Y-এর যোগ সেট্ বলা হয় এবং উহাকে $X \cup Y$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

মনে কর, $X = \{1, 2, 3\ 4, 5\}$ এবং

$Y = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

তাহা হইলে, $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

এই সেট্‌টির 1, 2, 3 এই পদ তিনটি X সেটের পদ এবং 6, 7, 8 পদ তিনটি Y সেটের পদ, আবার 4 এবং 5 পদ দুইটি X এবং Y উভয় সেটের সাধারণ পদ।

মনে কর, $A = \{1, 2\ 3, 4\}$ এবং

$B = \{1, 2, 4\}$.

এস্থলে B সেট্‌টি A সেটের একটি সাবসেট্ এবং

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} = A$.

ছেদ সেট্ :

দুইটি সেটের সাধারণ পদগুলি দ্বারা যদি অপর একটি সেট্ গঠন করা যায় তবে সেই সেট্‌টিকে প্রথম সেট্ দুইটির ছেদ সেট্ বলা হইয়া থাকে। যদি Z সেট্‌টি X এবং Y এই দুইটি সেটের ছেদ সেট্ হয়, তাহা হইলে Z সেট্‌টিকে $X \cap Y$ এই চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হইয়া থাকে।

মনে কর, $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং

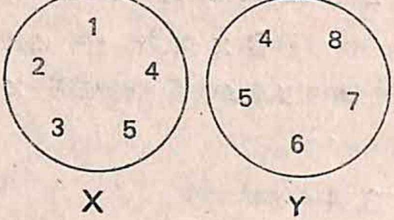
$Y = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

এক্ষেত্রে 4 এবং 5 এই পদ দুইটি উভয় সেটের সাধারণ পদ।

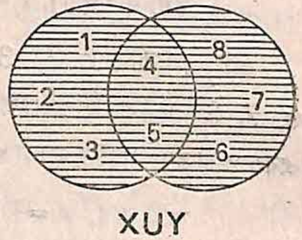
সুতরাং, $Z = X \cap Y = \{4, 5\}$.

চিত্রের সাহায্যে যোগ সেট্ এবং ছেদ সেট্ সম্পর্কে আরও সুস্পষ্ট ধারণা করা সম্ভব। মনে করা যাক্ নিম্নের চিত্রের ন্যায় বৃত্তাকার অংশ দ্বারা X এবং Y সেট্ দুইটি সূচিত করা হইল।

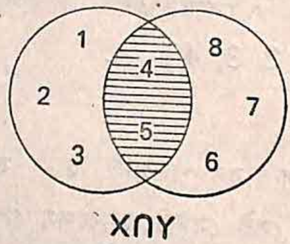
তাহা হইলে 2 নং চিত্রে সরলরেখাবৃত অংশটি X এবং Y-এর যোগ সেট্ এবং 3 নং চিত্রে অনুরূপ অংশটি উহাদের ছেদ সেট্ হইবে।



চিত্র নং 1



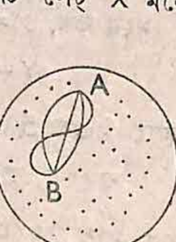
চিত্র নং 2



চিত্র নং 3

বিন্দু, রেখা, তল এবং রশ্মি ঃ

পার্শ্বের চিত্রে জ্যামিতিক ক্ষেত্রটিকে একটি সেট্ X মনে কর। এই সেটের পদগুলি এক একটি বিন্দু। এই সেটের যে কোন দুইটি বিন্দু যোগ করিয়া এক একটি রেখা পাওয়া যাইবে। যে কোন দুই বিন্দুর সংযোজক রেখার দৈর্ঘ্য ন্যূনতম হইলে উহাকে সরলরেখা বলা



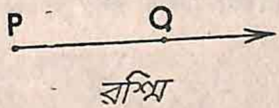
রেখা

চিত্র নং 4

হইবে অন্যথায় উহা বক্ররেখা হইবে। যে কোন দুইটি বিন্দুর মধ্য দিয়া একটি মাত্র সরলরেখা টানা যাইবে কিন্তু উহাদের সংযোগে বহু সংখ্যক বক্ররেখা গঠিত হইতে পারে। বাধাহীন অবস্থায় মসৃণ মেঝেতে একটি বল গড়াইয়া দিলে অথবা পাঁচতলার ছাদ হইতে একটি ঢিল মাটিতে ফেলিয়া দিলে উহারা ন্যূনতম পথ পরিভ্রমণ করিবে এবং উহাদের গতিপথ এক একটি সরলরেখা হইবে।

চিত্রে A এবং B বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে $\overleftrightarrow{AB}$ এই চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হইবে। এই রেখাটি উভয়দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত ধরা হয়। আবার $\overline{AB}$ দ্বারা একটি রেখাংশ বুঝান হইয়া থাকে যাহার প্রান্ত বিন্দু দুইটি A এবং B হইবে।

কোন সরলরেখা একটি নির্দিষ্ট দিকে অসীম দূরত্ব পর্যন্ত বিস্তৃত হইলে রেখাটিকে রশ্মি বলা হইবে। পার্শ্বের চিত্রে $\overrightarrow{PQ}$ একটি রশ্মি। ইহার P বিন্দুটি স্থির এবং Q বিন্দুর মধ্য দিয়া সরলরেখাটি অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।

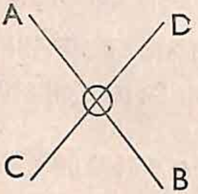


চিত্র নং 5

মেঝেতে বল গড়াইয়া দেওয়ার প্রসঙ্গে আবার আসা যাক। মেঝেটি দুই প্রকারের হইতে পারে। প্রথম প্রকারের মেঝের যে কোন দুই বিন্দু সংযোগ করিয়া একটি সরলরেখা পাওয়া যায় এবং দ্বিতীয় প্রকারের মেঝের যে কোন দুই বিন্দু যোগ করিয়া সরলরেখা পাওয়া যায় না। তোমার পড়ার টেবিলের তল, বইএর পাতার তল ইত্যাদি এই শ্রেণীর তলের অন্তর্ভুক্ত। এই জাতীয় ক্ষেত্রকে সমতল বলা যাইবে। কোন ফুটবলের উপরি পৃষ্ঠ অথবা কড়াই-এর

তল দ্বিতীয় প্রকার তলের উদাহরণ। এই প্রকারের ক্ষেত্রকে, বক্রতল বলা হয়।

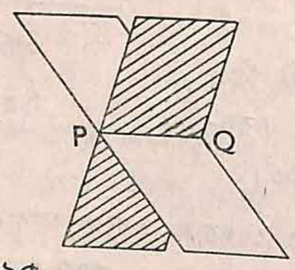
দুইটি সরলরেখা পরস্পরকে ছেদ করিলে তাহারা একটি মাত্র বিন্দুতে ছেদ করিবে। আবার দুইটি বক্ররেখাও পরস্পরকে কোন বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে। কাজেই দুইটি রেখার (সরল বা বক্র যাহাই হউক না কেন) ছেদিত অংশকে আমরা বিন্দু বলিতে পারি।



দুইটি সরলরেখা একটি বিন্দুতে ছেদ করে

চিত্র নং 6

একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে এইরূপ যে কোন তিনটি বিন্দুর মধ্যদিয়া একটি এবং কেবল মাত্র একটিই সমতল অঙ্কন করা যায়।



দুইটি তল PQ রেখা বরাবর ছেদ করিয়াছে

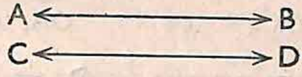
চিত্র নং 7

দুইটি সমতল পরস্পরকে ছেদ করিলে, একটি মাত্র সরলরেখায় ছেদ করে।

অনুরূপে দুইটি বক্রতল অথবা একটি সমতল এবং একটি বক্রতল

পরস্পরকে বক্ররেখায় ছেদ করে। কাজেই দুইটি পরস্পরছেদী তলের সাধারণ অংশকে রেখা বলা যাইতে পারে।

একই সমতলে অবস্থিত দুইটি সরলরেখাকে উভয় দিকে যথেচ্ছ বর্ধিত করিলেও যদি তাহারা মিলিত না হয়, তাহা হইলে ঐ সরলরেখা দুইটিকে সমান্তরাল সরলরেখা বলা হইবে।



সমান্তরাল সরল রেখা

চিত্র নং 8

তিন বা ততোধিক বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত হইলে ঐ বিন্দুগুলিকে সমরেখ বলা হয়।

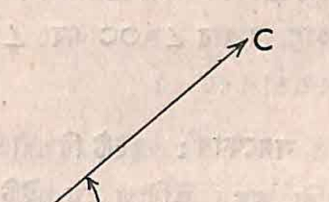


সমরেখ বিন্দু

চিত্র নং 9

কোণ, কোণের শ্রেণীবিভাগ ঃ

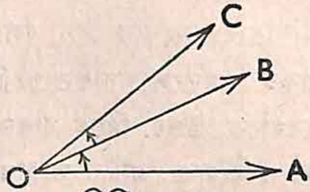
দুইটি রশ্মির সংযোগে একটি কোণ উৎপন্ন হইয়া থাকে। কোণ উৎপন্ন করিয়াছে এরূপ রশ্মি দুইটির একটি সাধারণ প্রান্ত-বিন্দু থাকে কিন্তু রশ্মি দুইটি পরস্পরের উপর সমাপতিত হয় না। $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$ রশ্মি দুইটির সংযোগে উৎপন্ন কোণটিকে $\angle CAB$ অথবা $\angle BAC$ দ্বারা সূচিত করা হয়। রশ্মি দুইটির সাধারণ প্রান্ত বিন্দু A-কে ঐ কোণের শীর্ষবিন্দু বলা হয়।



চিত্র নং 10

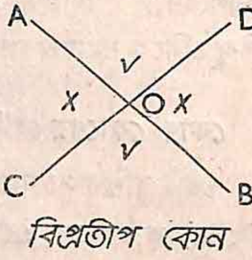
সন্নিহিত কোণ ঃ তিনটি রশ্মির প্রান্তবিন্দুটি সাধারণ হইলে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের একটিকে অপরটির সন্নিহিত

কোণ বলা হয়। পার্শ্বস্থ চিত্রে AOB এবং BOC কোণ দুইটি সন্নিহিত কোণ। $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ এবং $\overrightarrow{OC}$ রশ্মি তিনটির সাধারণ প্রান্ত বিন্দু O এবং উহাই কোণ দুইটির শীর্ষবিন্দু। $\overrightarrow{OB}$ রশ্মিটি কোণ দুইটির সাধারণ রশ্মি।



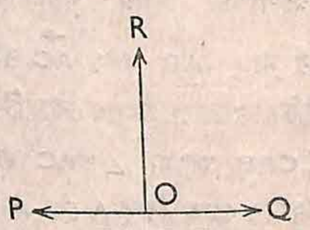
সন্নিহিত কোণ
চিত্র নং 11

বিপ্রতীপ কোণ: দুইটি সরলরেখা পরস্পরকে ছেদ করিলে ছেদ-বিন্দুতে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের মধ্যে পরস্পরের বিপরীত দিকে অবস্থিত কোণ দুইটিকে বিপ্রতীপ কোণ বলা হয়। পার্শ্বস্থ চিত্রে ∠AOD এবং ∠BOC বিপ্রতীপ কোণ, আবার ∠AOC এবং ∠BOD বিপ্রতীপ কোণ।



বিপ্রতীপ কোন
চিত্র নং 12

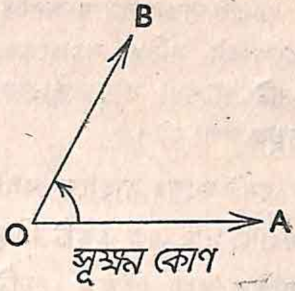
সমকোণ: দুইটি বিপরীত রশ্মির মিলন বিন্দুতে অপর একটি রশ্মি অঙ্কন করিলে যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের পরিমাপ পরস্পর সমান হইলে ঐ সন্নিহিত কোণ-দ্বয়ের প্রত্যেকটিকে সমকোণ বলে। পার্শ্বের চিত্রে ∠POR এবং ∠QOR প্রত্যেকটি



লম্বরেখা
ও সমকোণ
চিত্র নং 13

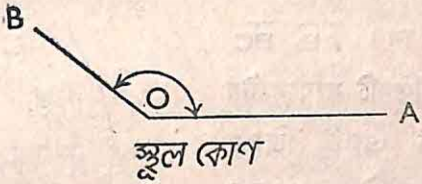
এক সমকোণ। এক্ষেত্রে RO এবং PQ পরস্পরের উপর লম্ব।

সূক্ষ্ম কোণ : যে কোণের পরিমাপ এক সমকোণ অপেক্ষা ছোট, তাহাকে সূক্ষ্ম কোণ বলা হয়।



চিত্র নং 14

স্থূল কোণ : যে কোণের পরিমাপ এক সমকোণ অপেক্ষা বড়,



চিত্র নং 15

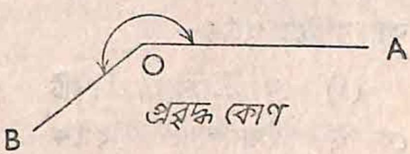
কিন্তু দুই সমকোণ অপেক্ষা ছোট, তাহাকে স্থূলকোণ বলে।

সরল কোণ : যে কোণের পরিমাপ দুই সমকোণের সমান, তাহাকে সরল কোণ বলে।



চিত্র নং 16

প্রবৃদ্ধ কোণ : যে কোণের পরিমাপ দুই সমকোণ অপেক্ষা বড়, কিন্তু চারি সমকোণ অপেক্ষা ছোট, তাহাকে প্রবৃদ্ধ কোণ বলে।

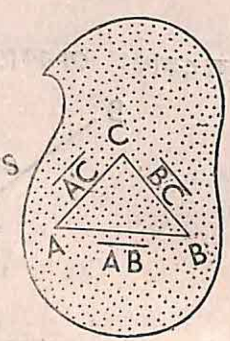


চিত্র নং 17

ত্রিভুজ, ত্রিভুজের শ্রেণীবিভাগঃ

একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে এইরূপ যে কোন তিনটি বিন্দু পরস্পরের সহিত সরলরেখা দ্বারা সংযুক্ত করিলে যে রেখাংশ তিনটি পাওয়া যায় তাহাদের দ্বারা সীমাবদ্ধ সামতলিক ক্ষেত্রকে ত্রিভুজ বলা হয়।

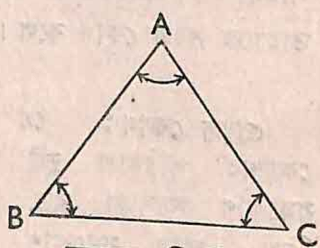
সেট্ তত্ত্বের সাহায্যে বলা যাইতে পারে যে কোন সেট্ S-এর পদগুলি যদি এক একটি বিন্দু হয়, তাহা হইলে এক সরলরেখায় অবস্থিত নহে এইরূপ তিনটি বিন্দু A, B, এবং C পরস্পরের সহিত সংযুক্ত করিলে, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ এবং $\overline{AC}$ রেখাংশ তিনটি S সেটের সাবসেট্ হইবে। $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ এবং $\overline{AC}$ এই তিনটি সাবসেটের যোগ সেট্টি একটি ত্রিভুজ হইবে। ঐ ত্রিভুজটিকে $\triangle ABC$ দ্বারা সূচিত করা হইয়া থাকে। $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ এবং $\overline{AC}$ রেখাংশ তিনটিকে $\triangle ABC$-এর বাহু এবং A, B, C বিন্দু তিনটিকে উহার শীর্ষ বিন্দু বলা হয়।



চিত্র নং 18

কোণের পরিমাপ হিসাবে ত্রিভুজকে তিন প্রকারে বিভক্ত করা যাইতে পারে—

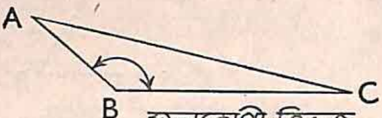
(1) যে ত্রিভুজের তিনটি কোণই সূক্ষ্মকোণ তাহাকে সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ বলে।



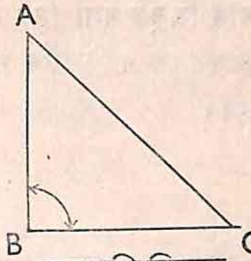
সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ

চিত্র নং 19

(2) যে ত্রিভুজের একটি কোণ স্থূলকোণ, তাহাকে স্থূলকোণী ত্রিভুজ বলা হয়।



চিত্র নং 20

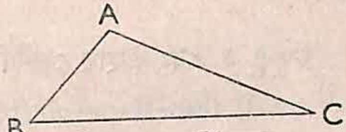


চিত্র নং 21

(3) যে ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ তাহাকে সমকোণী ত্রিভুজ বলা হয়।

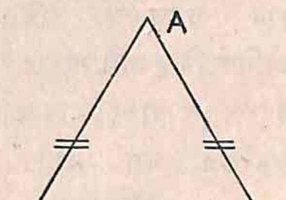
বাহুর পরিমাপ হিসাবেও ত্রিভুজকে তিন ভাগে ভাগ করা যায়।

(1) যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুই পরস্পর অসমান তাহাকে বিষমবাহু ত্রিভুজ বলা হয়। এরূপ ক্ষেত্রে ত্রিভুজের কোণ তিনটিও পরস্পর অসমান হয়।



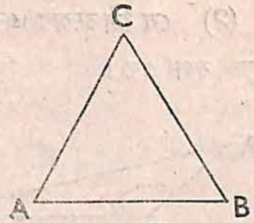
চিত্র নং 22

(2) যে ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান, তাহাকে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ বলা হয়। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহু দুইটির সংলগ্ন কোণ দুইটিও পরস্পর সমান।



চিত্র নং 23

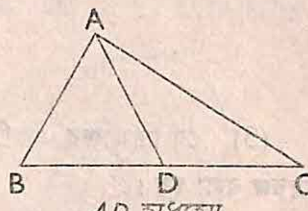
(3) যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুই পরস্পর সমান, তাহাকে সমবাহু ত্রিভুজ বলা হয়। সমবাহু ত্রিভুজের কোণ তিনটিও পরস্পর সমান।



সমবাহু ত্রিভুজ

চিত্র নং 24

ত্রিভুজের যে কোন শীর্ষ বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক রেখাংশকে মধ্যমা বলা হয়। পার্শ্বের চিত্রে ABC ত্রিভুজের একটি মধ্যমা হইল AD.

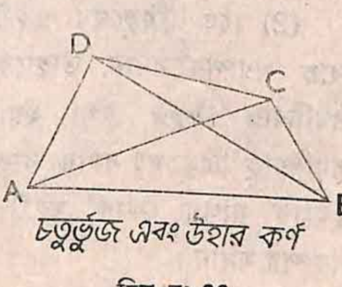


AD মধ্যমা

চিত্র নং 25

চতুর্ভুজ এবং উহার শ্রেণীবিভাগঃ

চারিটি রেখাংশ দ্বারা সীমাবদ্ধ সামতলিক ক্ষেত্রকে চতুর্ভুজ বলা হয়। যে রেখাংশগুলি দ্বারা ক্ষেত্রটি সীমাবদ্ধ হয় তাহাদিগকে চতুর্ভুজের বাহু বলা হয়। চতুর্ভুজের চারিটি কোণ থাকে। কোন চতুর্ভুজের বিপরীত কৌণিক বিন্দুগুলি সংযুক্ত করিয়া যে রেখাংশ পাওয়া যায় তাহাকে চতুর্ভুজের কর্ণ বলা হয়। চতুর্ভুজের দুইটি কর্ণ থাকে। পার্শ্বের চিত্রে ABCD চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় যথাক্রমে AC এবং BD.

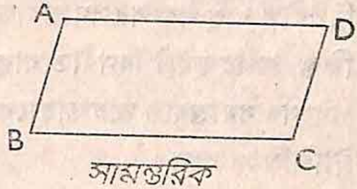


চতুর্ভুজ এবং উহার কর্ণ

চিত্র নং 26

বাহু এবং কোণের পরিমাপ হিসাবে চতুর্ভুজকে নিম্নলিখিত বিভিন্ন প্রকারে ভাগ করা যায়—

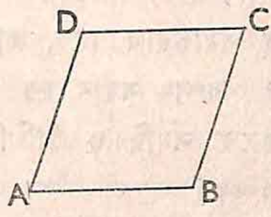
(1) যে চতুর্ভুজের বিপরাত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল তাহাকে সামান্তরিক বলা হয়। পার্শ্বের চিত্রে ABCD একটি সামান্তরিক। ইহার $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ এবং $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.



সামান্তরিক

চিত্র নং 27

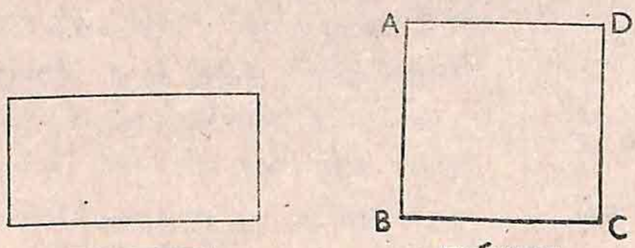
(2) যে সামান্তরিকের চারিটি বাহু পরস্পর সমান কিন্তু কোণগুলি সমকোণ নহে, তাহাকে রম্বস বলে।



রম্বস

চিত্র নং 28

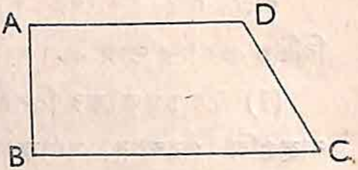
(3) যে সামান্তরিকের কোণগুলি প্রত্যেকে এক সমকোণ, তাহাকে আয়তক্ষেত্র বলা হয়। যে আয়তক্ষেত্রের প্রত্যেকটি বাহু সমান তাহাকে বর্গক্ষেত্র বলা হয়।



আয়তক্ষেত্র বর্গক্ষেত্র

চিত্র নং 29

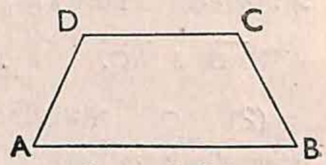
(4) যে চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহু পরস্পর সমান্তরাল কিন্তু অপর দুইটি বিপরীত বাহু পরস্পর সমান্তরাল নহে তাহাকে ট্রাপিজিয়ম বলে।



ট্রাপিজিয়ম

চিত্র নং 30

(5) ট্রাপিজিয়মের যে দুইটি বাহু সমান্তরাল নহে, তাহারা যদি পরস্পর সমান হয় তবে তাহাকে সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম বলা হয়।



সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম

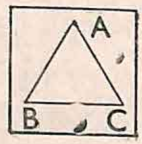
চিত্র নং 31

প্রথম অধ্যায়

চলন এবং আবর্তন (Translation & Rotation)

প্রাত্যহিক জীবনে তোমরা বহুবিধ স্থানান্তর প্রক্রিয়ার সহিত পরিচিত। গাড়ীর চাকার গতি, সূর্যের চারিদিকে পৃথিবীর পরিক্রমণ, আয়নায় কোন বস্তুর প্রতিবিম্ব গঠন, ক্যামেরায় তোলা ছবি, ভূগোল বই-এর পাতায় পৃথিবীর মানচিত্র প্রভৃতি কোন না কোন স্থানান্তর প্রক্রিয়ার দ্বারা সম্পাদিত হইয়া থাকে। যে প্রক্রিয়ার সাহায্যে এই ধরনের স্থানান্তর ঘটান হয় তাহাকে ম্যাপিং বলা হয়। স্থানান্তর প্রক্রিয়া মূলতঃ দুই প্রকার। প্রথম প্রকার স্থানান্তরে মূল বস্তুর আকৃতি এবং আকারের কোনরূপ পরিবর্তন হয় না। প্রতিফলন, চলন, আবর্তন প্রভৃতি এই শ্রেণীর স্থানান্তরের অন্তর্ভুক্ত। দ্বিতীয় প্রকার স্থানান্তরে বস্তুর আকার বা সাইজের পরিবর্তন হয়। বই-এর পাতায় পৃথিবীর মানচিত্র বা ক্যামেরায় তোলা ছবি এই পর্যায়ের স্থানান্তর প্রক্রিয়ার অন্তর্ভুক্ত। নিম্নোক্ত অনুচ্ছেদে আমরা চলন এবং আবর্তন সম্পর্কে আলোচনা করিব।

চলন ঃ একখানি তাসের উপর নিম্নের 32 নং চিত্রের ন্যায় ABC একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর। টেবিলের উপর রক্ষিত একখানি বড় কাগজের উপর তাসখানি স্থাপন করিয়া পিনের সাহায্যে ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় A, B এবং C বিন্দুতে এইরূপে চাপ দেওয়া হইল যাহাতে কাগজের উপর A, B এবং C বিন্দুর অনুরূপ তিনটি বিন্দু A_1, B_1 এবং C_1 বিন্দু উৎপন্ন হয়। লক্ষ্য রাখিতে হইবে যাহাতে তাসখানি কোন প্রকারে নড়িয়া না যায়। এইবার তাসখানি



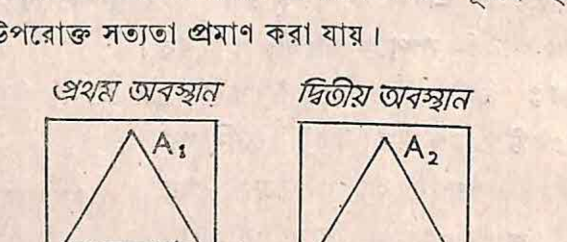
চিত্র নং 32

প্রথম অবস্থানে রাখিয়া, উহার একধার বরাবর একটি রুলার স্থাপন কর। এইবার রুলার খানিকে ঐ অবস্থানে স্থির রাখিয়া তাসখানিকে রুলারের গা ঘেষিয়া আস্তে আস্তে সরাইয়া অপর একটি নূতন অবস্থানে আন। দ্বিতীয় অবস্থানে তাসখানিকে স্থির রাখিয়া পুনরায় ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় A, B এবং C বিন্দুতে পিনের অগ্রভাগ দ্বারা চাপ দিয়া বড় কাগজের উপর উহাদের অনুরূপ তিনটি বিন্দু উৎপন্ন কর। এই বিন্দু তিনটিকে যথাক্রমে A_2, B_2 এবং C_2 দ্বারা সূচিত কর। A_1, B_1, C_1 এবং A_2, B_2, C_2 বিন্দুগুলি সংযুক্ত করিয়া $\triangle A_1B_1C_1$ এবং $\triangle A_2B_2C_2$ অঙ্কন কর।

মাপিয়া দেখা যাইবে যে,

$\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} = \overline{C_1C_2}$.

অর্থাৎ. এইরূপ স্থানান্তর প্রক্রিয়ার ফলে তাসখানির উপরিস্থিত প্রত্যেকটিতে বিন্দু একই দিকে সমান দূরত্বে স্থানান্তরিত হইয়াছে। তাসখানিকে অন্য যে কোনদিকে এবং যে কোন দূরত্বে স্থানান্তরিত করিয়া উপরোক্ত সত্যতা প্রমাণ করা যায়।



চিত্র নং 33

দ্বিতীয় অবস্থানটিকে প্রথম অবস্থান হইতে অনেক দূরে সরাইয়া লইলেও দেখিবে $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$ এবং $\overline{C_1C_2}$ রেখাংশ তিনটি

কখনই একটি আর একটিকে ছেদ করিবে না। অর্থাৎ এইরূপ স্থানান্তর প্রক্রিয়ার ফলে সকল বিন্দু এবং উহাদের নিজ নিজ প্রতিবিম্বের সংযোজক সরলরেখাগুলি পরস্পর সরলরেখা হইবে।

অর্থাৎ, $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{B_1B_2} \parallel \overline{C_1C_2}$ হইবে।

এইবার $A_1B_1C_1$ এবং $A_2B_2C_2$ ত্রিভুজদ্বয়ের কোণগুলি মাপিয়া দেখ।

দেখিবে, $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$

$\angle B_1C_1A_1 = \angle B_2C_2A_2$

এবং $\angle C_1A_1B_1 = \angle C_2A_2B_2$

মাপনীর সাহায্যে ত্রিভুজদ্বয়ের বাহুগুলি মাপিলে দেখিবে

$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$

$\overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2}$

এবং $\overline{C_1A_1} = \overline{C_2A_2}$

অর্থাৎ এই স্থানান্তর প্রক্রিয়ায় যেহেতু ABC ত্রিভুজের কোণ এবং বাহুগুলি অপরিবর্তিত আছে সুতরাং উহার আকার এবং আকৃতির কোনরূপ পরিবর্তন হয় নাই, শুধু উহার অবস্থানের পরিবর্তন ঘটিয়াছে।

মসৃণ মেঝে বরাবর চক দ্বারা দুই-তিন ফুট লম্বা একটি সরল-রেখা অঙ্কিত কর। এইবার ঐ রেখাংশের এক প্রান্তে একটি চেয়ারের কোন এক প্রান্ত রাখিয়া মেঝের উপর অন্যান্য পায়াগুলির অবস্থান চক দ্বারা চিহ্নিত কর। এইবার চেয়ারটিকে মেঝে বরাবর এমন ভাবে সরাইয়া লও যাহাতে ঐ রেখাংশের একপ্রান্তে রক্ষিত পায়াটি রেখা বরাবর অন্য প্রান্তে গিয়া পৌঁছায়। এই অবস্থানে মেঝে বরাবর অন্যান্য পায়াগুলির অবস্থান চিহ্নিত কর। দেখিবে অন্যান্য

পায়াগুলিও এক একটি রেখাংশ বরাবর সমান দূরত্বে সরিয়াছে। প্রথম অবস্থানে চেয়ারের যে কোন দুইটি পায়ার প্রান্তবিন্দু যোগ করিয়া যে সরলরেখা পাইবে তাহা দ্বিতীয় অবস্থানে ঐ দুই বিন্দু সংযোজক সরলরেখার সহিত সমান দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট হইবে।

টেবিলের উপর একটি বই রাখিয়া কোন এক ধার বরাবর বইটিকে সরাইয়া লইয়াও উপরোক্ত পরীক্ষা করিয়া দেখিতে পার।

উপরের স্থানান্তর প্রক্রিয়াগুলিতে একটি বস্তু অথবা একটি সামতলিক ক্ষেত্রের সকল বিন্দু একই দিকে সমান দূরত্বে স্থানান্তরিত হইয়াছে। এই প্রকার স্থানান্তর প্রক্রিয়াকে চলন বলা হয়। মনে রাখিও, চলনের একটি নির্দিষ্ট অভিমুখ থাকে।

চলনের ধর্ম ঃ

(i) কোন দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশের দৈর্ঘ্য ও চলনের-ফলে-প্রাপ্ত ঐ দুইটি বিন্দুর অনুরূপ প্রতিবিম্ব দুইটির সংযোজক রেখাংশের দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান এবং সমান্তরাল হইবে।

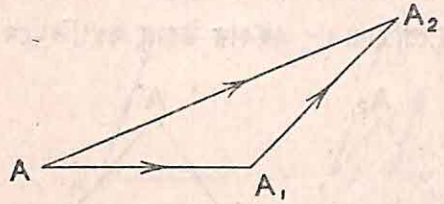
(ii) চলন প্রক্রিয়ায় এইরূপ কোন বিন্দু পাওয়া যায় না যাহা ঐ বিন্দুরই প্রতিবিম্ব হইবে। অর্থাৎ চলন প্রক্রিয়ায় চলনশীল বস্তুর প্রত্যেকটি বিন্দুই স্থানান্তরিত হইবে।

(iii) চলন প্রক্রিয়ায় কোন রেখার প্রতিবিম্ব ঐ রেখাই কখনও হইতে পারে না।

(iv) চলন প্রক্রিয়ায় কোন কোণের মান ও দিকস্থিতি উহার প্রতিবিম্বের মান ও দিকস্থিতির সহিত সমান হইবে।

(v) দুইটি চলন প্রক্রিয়ার যুগ্ম ফলও একটি চলন প্রক্রিয়া।

মনে করা যাক একটি চলন প্রক্রিয়ার ফলে কোন বস্তু বা সামতলিক ক্ষেত্রের কোন এক বিন্দু A হইতে A_1 অবস্থানে আসিল। দ্বিতীয় আর একটি চলন প্রক্রিয়ায় ঐ বিন্দুটি A_1 হইতে A_2 অবস্থানে আসিল। ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে উহার শেষ অবস্থান A_2-তে



চিত্র নং 34

আনিতে দুইটি চলন প্রক্রিয়ার সাহায্য না লইয়া $\overline{AA_2}$ বরাবর একটি মাত্র চলন প্রক্রিয়ার সাহায্য লইলেই চলিত। অর্থাৎ উহাদের যুগ্মফল একটি চলন প্রক্রিয়ার সাহায্যেই ঘটিতে পারে।

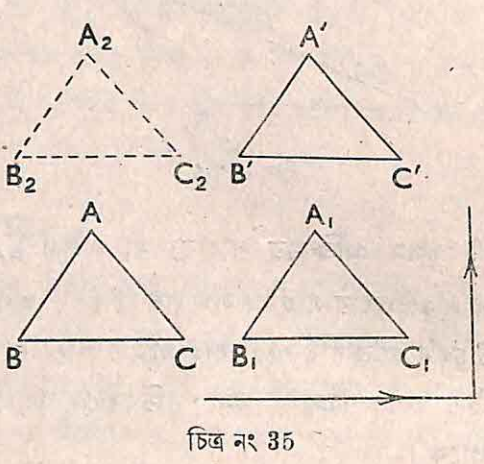
(vi) দুইটি চলন ক্রিয়ার ক্রম পরিবর্তনে উহাদের যুগ্মফল অপরিবর্তিত থাকে।

মনে কর ABC ত্রিভুজটি প্রথম চলন প্রক্রিয়ার ফলে $A_1B_1C_1$ অবস্থানে আসিল। প্রথম চলন প্রক্রিয়ার লম্বাভিমুখে দ্বিতীয় আর একটি চলন প্রক্রিয়ার ফলে ত্রিভুজটি শেষ অবস্থান $A'B'C'$-এ আসিল। [35 নং চিত্র দেখ]

চলন প্রক্রিয়া দুইটির ক্রম পরিবর্তন করিয়া প্রথমে দ্বিতীয় চলন প্রক্রিয়া সংঘটিত হইতে দিলে এই প্রক্রিয়ায় ত্রিভুজটি $A_2B_2C_2$ অবস্থানে আসিবে। এইবার উহার লম্বাভিমুখে প্রথম চলন ঘটিলে ত্রিভুজটি $A'B'C'$ অবস্থানে আসিবে। দ্বিতীয় চলন প্রক্রিয়াটি

প্রথমটির সহিত যে কোন কোণে নত থাকিলেও একই ফল পাওয়া যাইবে।

আর একটি সহজ পরীক্ষা করিয়া চলনের এই ধর্মটির যথার্থতা পরীক্ষা করা যাইতে পারে। টেবিলের যে কোন প্রান্তে একখানি বই রাখিয়া যে কোন ধার বরাবর বইটিকে প্রথমে একফুট সরাও। ইহা প্রথম চলন প্রক্রিয়া। এইবার উহার লম্বাভিমুখে দ্বিতীয় চলন



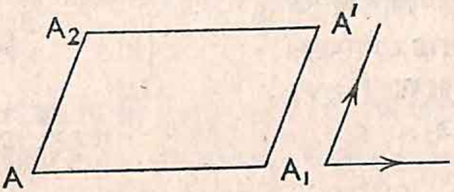
চিত্র নং 35

প্রক্রিয়ায় উহাকে আরও দুই ফুট সরাও। এই দুই চলন প্রক্রিয়ার যুগ্ম ফলে বইটি যে অন্তিম অবস্থানে আসিল তাহার সীমারেখা চিহ্নিত করিয়া রাখ। এইবার বইটিকে প্রাথমিক অবস্থানে ফিরাইয়া লইয়া গিয়া প্রথমে দ্বিতীয় চলন প্রক্রিয়া এবং পরে প্রথমে চলন প্রক্রিয়া ঘটাও। দেখিবে বইটির অন্তিম অবস্থান পূর্বের অন্তিম অবস্থানের সহিত মিলিয়া যাইবে।

(vii) যদি প্রথম চলন প্রক্রিয়ায় $\overline{AA_1}$ রেখাংশটি $\overline{A_2A'}$ অবস্থানে আসে এবং তৎপরে দ্বিতীয় চলন প্রক্রিয়ায় $\overline{AA_2}$ রেখাংশটি

$\overline{A_1A'}$ অবস্থানে আসে, তাহা হইলে অতিক্রান্ত ক্ষেত্র $AA_1A'A_2$ একটি সামান্তরিক হইবে।

প্রমাণ ঃ প্রথম চলন প্রক্রিয়ার ফলে $\overline{AA_1}$ রেখাংশটি $\overline{A_2A'}$ অবস্থানে আসিল। চলনের ধর্মানুসারে $\overline{AA_1}$ এবং $\overline{A_2A'}$ সমান ও সমান্তরাল। এইবার দ্বিতীয় চলন প্রক্রিয়ায় $\overline{AA_2}$ রেখাংশটি



চিত্র নং 36

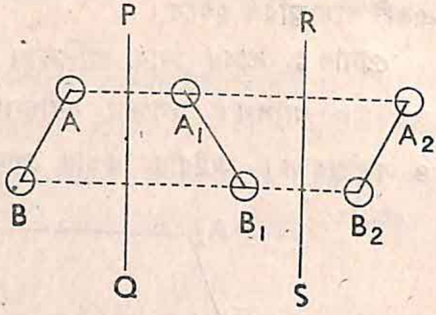
$\overline{A_1A'}$ অবস্থানে আসিবে যাহাতে $\overline{AA_2}$ এবং $\overline{A_1A'}$ সমান ও সমান্তরাল হইবে। সুতরাং $AA_1A'A_2$ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি সমান ও সমান্তরাল। অতএব, উহা একটি সামান্তরিক।

প্রতিফলনের সাহায্যে চলনের গঠন ব্যাখ্যা ঃ

তোমরা ষষ্ঠ শ্রেণীতে প্রতিফলন সম্পর্কে জানিয়াছ। চলন প্রক্রিয়া দুইটি সমান্তরাল প্রতিফলন রেখায় পর পর প্রতিফলনের ফলে সম্পাদিত হইতে পারে অর্থাৎ যে কোন চলন প্রক্রিয়া দুইটি সমান্তরাল প্রতিফলন রেখায় পরপর দুইবার প্রতিফলনের তুল্য।

মনে কর PQ এবং RS দুইটি সমান্তরাল প্রতিফলন রেখায় পরপর প্রতিফলনের ফলে উহার সহিত একই তলে অবস্থিত A বিন্দুর শেষ প্রতিবিম্ব A_2 গঠিত হইল। প্রথমে PQ রেখায় প্রতিফলনের ফলে A বিন্দুর প্রতিবিম্ব A_1 গঠিত হইল এবং পরে RS রেখায় প্রতিফলনের ফলে A_1-এর প্রতিবিম্ব A_2 পাওয়া গেল।

প্রতিফলনের ধর্ম অনুযায়ী AA_2 রেখা PQ এবং RS উভয়ের উপরই লম্ব হইবে এবং $\overline{A_1A_2}$ = PQ এবং RS রেখার অন্তর্বর্তী দূরত্বের দ্বিগুণ। অনুরূপে একই তলে অবস্থিত B বিন্দুর চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব B_2 পাওয়া যাইবে যাহাতে $\overline{BB_2}$ = PQ ও RS রেখাদ্বয়ের আভ্যন্তরীণ দূরত্বের দ্বিগুণ। সুতরাং এক্ষেত্রে



চিত্র নং 37

$$\overline{AA_2} = \overline{BB_2}$$

এবং $\overline{AA_2} \parallel \overline{BB_2}$

উপরোক্ত ধর্ম দুইটি চলনের বৈশিষ্ট্য হওয়ায় চলন প্রক্রিয়াকে দুইটি সমান্তরাল রেখায় পরপর দুইবার প্রতিফলনের তুল্য ধরা যাইতে পারে।

চলন প্রক্রিয়ায় বস্তুর নিজস্ব আকার, আকৃতি এবং দিকস্থিতি অপরিবর্তিত থাকে।

আবর্তন বা ঘূর্ণন (Rotation) :

দৈনন্দিন জীবনে আমরা বিভিন্ন প্রকার আবর্তন লক্ষ্য করিয়া থাকি। যেমন গাড়ীর চাকার গতি, ঘড়ির কাঁটার আবর্তন, সূর্যের চারিদিকে পৃথিবীর আবর্তন ইত্যাদি।

আবর্তন হইল এমন একটি স্থানান্তর প্রক্রিয়া যাহার ফলে কোন সমতল বরাবর একটি বস্তু বা কোন সামতলিক ক্ষেত্র এইরূপে স্থানান্তরিত হয় যে, ঐ সমতলস্থিত যে কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে ঐ বস্তু বা সামতলিক ক্ষেত্রের যে কোন বিন্দুর প্রাথমিক

অবস্থান ও শেষ অবস্থানের ভিতর কৌণিক দূরত্ব, সর্বদা সমান হইবে। ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে আবর্তন কেন্দ্র এবং উৎপন্ন কোণকে আবর্তন কোণ বলা হইয়া থাকে। যে কোন একটি নির্দিষ্ট আবর্তন প্রক্রিয়ায় আবর্তন কেন্দ্র, আবর্তন কোণ এবং আবর্তনের অভিমুখ অবশ্যই উল্লেখ করিতে হইবে।

নিম্নলিখিত প্রতিপাদনের সাহায্যে আবর্তন সম্পর্কে তোমাদের ধারণা সুস্পষ্ট হইবে।

একখানি কাগজের উপর ABC একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিয়া উহাকে টেবিলের উপর রাখ। ঐ কাগজের উপর যে কোন স্থানে আবর্তন কেন্দ্র O চিহ্নিত কর। OA সংযুক্ত কর এবং OA রেখার সহিত আবর্তন কোণ $\angle X$-এর সমান করিয়া অপর একটি সরল-রেখা টান [পরপৃষ্ঠার চিত্র দেখ]। এইবার ত্রিভুজ-অঙ্কিত কাগজের উপর একখানি ট্রেসিং কাগজ স্থাপন করিয়া একখানি পিনের অগ্রভাগ দ্বারা ঐ ট্রেসিং কাগজে A, B এবং C বিন্দুগুলি চিহ্নিত কর। অতঃপর ট্রেসিং কাগজখানি একটি পিন বা কম্পাসের সাহায্যে O বিন্দুতে চাপিয়া ধরিয়া উহাকে ত্রিভুজ-অঙ্কিত কাগজের উপর দিয়া এইরূপে ঘুরান হইল যাহাতে ট্রেসিং কাগজের উপরে A, B, C-এর অনুরূপ চিহ্নিত বিন্দু তিনটির মধ্যে A-এর অনুরূপ বিন্দুটি নিচের কাগজে O বিন্দুর মধ্য দিয়া OA-এর সহিত X কোণে নত রেখার উপর পড়িল।

এই অবস্থানে ট্রেসিং কাগজখানিকে স্থির রাখিয়া পূর্বে উহার উপর A, B, C-এর অনুরূপ যে তিনটি বিন্দু চিহ্নিত করা হইয়াছিল সেই বিন্দুগুলিকে পিন বা কম্পাসের সাহায্যে চাপ দিয়া ট্রেসিং কাগজের তলার কাগজে A′, B′ এবং C′ বিন্দু তিনটি চিহ্নিত করা

হইল। A', B' এবং C' বিন্দু তিনটি সংযুক্ত করিলে $\Delta A'B'C'$ পাওয়া যাইবে। এই ত্রিভুজটিই O আবর্তন কেন্দ্রের সাপেক্ষে এবং ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে X কোণে আবর্তনের ফলে ΔABC এর প্রতিবিম্ব হইবে। $\angle AOA'$, $\angle BOB'$ এবং $\angle COC'$ মাপিয়া দেখ। উহারা পরস্পর সমান হইবে। মাপনীর সাহায্যে নিম্নলিখিত বিষয়গুলিও পরীক্ষা করিয়া দেখ।

$\overline{OA} = \overline{OA'}$

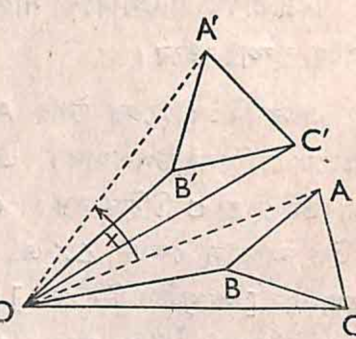
$\overline{OB} = \overline{OB'}$

$\overline{OC} = \overline{OC'}$

আবার, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

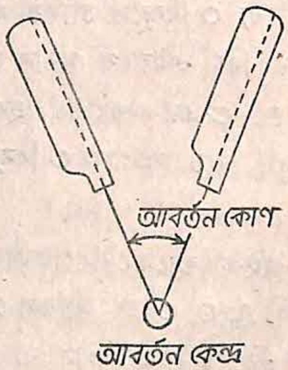
$\overline{BC} = \overline{B'C'}$

$\overline{CA} = \overline{C'A'}$



চিত্র নং 38

আবর্তনের ফলে কোন বস্তু বা সামতলিক ক্ষেত্রের আকার ও আকৃতি অপরিবর্তিত থাকে এবং আবর্তন কেন্দ্রের সাপেক্ষে বস্তুর প্রতিসমতা অক্ষুণ্ণ থাকে। পার্শ্বের চিত্র হইতে ইহা স্পষ্টই বুঝিতে পারিবে।

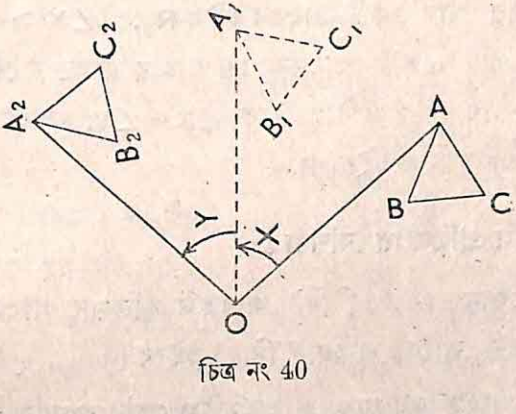


চিত্র নং 39

একাধিক আবর্তনের যুগ্মফল :

মনে কর আবর্তন কেন্দ্র O সাপেক্ষে একটি বস্তুর উপর দুইটি আবর্তন ক্রিয়া সংঘটিত

হইল। উহাদের আবর্তন কোণ যথাক্রমে $\angle X$ এবং $\angle Y$. মনে কর প্রথম আবর্তন প্রক্রিয়ায় ABC ত্রিভুজটির প্রতিবম্ব $\triangle A_1B_1C_1$ হইল এবং তৎপরে দ্বিতীয় আবর্তন প্রক্রিয়ায় উহার প্রতিবিম্ব $\triangle A_2B_2C_2$ হইল। চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে পরপর দুইটি আবর্তনের ফলে ABC ত্রিভুজটি $\triangle A_2B_2C_2$ অবস্থা প্রাপ্ত হইয়াছে। পরপর দুইটি আবর্তন প্রক্রিয়া সম্পাদন না



চিত্র নং 40

করিয়া ঐ দুই আবর্তন কোণের সমষ্টির সমান অর্থাৎ $\angle X + \angle Y$-র সমান আবর্তন কোণ-বিশিষ্ট একটি আবতনক্রিয়া সম্পাদন করিলেও ABC ত্রিভুজের প্রতিবিম্ব হিসাবে $\triangle A_2B_2C_2$ পাওয়া যাইবে। সুতরাং একই আবর্তন কেন্দ্রের সাপেক্ষে এবং একই দিকে পর পর দুইটি আবর্তনের ফল অপর একটিমাত্র আবর্তন দ্বারা সম্পন্ন করা যায়।

মনে কর R_1 এবং R_2 দুইটি আবর্তন প্রক্রিয়া যাহাদের প্রত্যেকেরই আবর্তন কেন্দ্র O এবং উহাদের আবর্তন কোণের পরিমাপ ঘড়ির কাঁটার দিকে যথাক্রমে $\angle X$ এবং $\angle Y$. এখন যদি

R এমন একটি আবর্তন প্রক্রিয়া হয় যাহার আবর্তন কেন্দ্র O এবং আবর্তন কোণের পরিমাপ ঘড়ির কাঁটার দিকে $\angle X + \angle Y$ হয় তাহা হইলে R_1 এবং R_2-এর যুগ্মফল R হইবে।

আবার মনে কর আবর্তন কেন্দ্র O সাপেক্ষে ঘড়ির কাঁটার দিকে $\angle X$ আবর্তন কোণ-সম্পন্ন একটি আবর্তন হইল R_1 এবং একই আবর্তন কেন্দ্র সাপেক্ষে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে $\angle Y$ আবর্তন কোণ-সম্পন্ন আর একটি আবর্তন হইল R_2. $\angle X > \angle Y$ হইলে যদি R এমন একটি আবর্তন হয় যাহার আবর্তন কেন্দ্র O এবং আবর্তন কোণ ঘড়ির কাঁটার দিকে $\angle X - \angle Y$, তাহা হইলে R_1 এবং R_2-এর যুগ্মফল হইবে R.

আবর্তন প্রক্রিয়ার বৈশিষ্ট্য ঃ

(i) কোন একটি নির্দিষ্ট আবর্তন প্রক্রিয়ায় আবর্তন কেন্দ্র এবং আবর্তন কোণের পরিমাপ নির্দিষ্ট হইবে।

(ii) আবর্তনের ফলে আবর্তনশীল কোন বস্তুর বা সামতলিক ক্ষেত্রের যে কোন বিন্দু এবং উহার প্রতিবিম্বের কৌণিক দূরত্ব সর্বদা সমান থাকিবে।

(iii) আবর্তনের ফলে কোন নির্দিষ্ট কোণের মান অপরিবর্তিত থাকে কিন্তু দিকস্থিতি পরিবর্তিত হয়।

(iv) যে কোন আবর্তন প্রক্রিয়ায় আবর্তন কেন্দ্রটি একটি স্থির বিন্দু অর্থাৎ, আবর্তন কেন্দ্রের প্রতিবিম্ব আবর্তন কেন্দ্রই হইবে।

(v) আবর্তনের ফলে কোন বস্তুর আকার এবং আকৃতির পরিবর্তন হয় না।

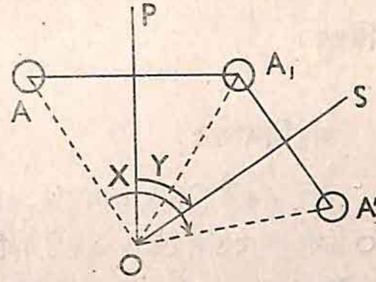
(vi) যে তল বরাবর আবর্তন সম্পাদিত হয়, আবর্তন কেন্দ্র তাহার উপর যে কোন স্থানে হইতে পারে।

(vii) আবর্তনের ফলে আবর্তনশীল বস্তুর যে কোন বিন্দুর দূরত্ব আবর্তন কেন্দ্র হইতে সতত সমান থাকে।

প্রতিফলনের সাহায্যে আবর্তন প্রক্রিয়ার ব্যাখ্যা ঃ

একই সমতলে দুইটি পরস্পরচ্ছেদী প্রতিফলন রেখায় দুইবার পরপর প্রতিফলনের ফলে যে স্থানান্তর প্রক্রিয়া সম্পাদিত হয় তাহাকে আবর্তন প্রক্রিয়া বলা হয়। পার্শ্বের চিত্র হইতে তোমরা এই সত্য প্রমাণ করিতে পারিবে।

একই সমতলে অবস্থিত PO এবং SO প্রতিফলন রেখা দুইটি O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।



চিত্র নং 41

PO প্রতিফলন রেখায় প্রতিফলনের ফলে ঐ সমতলে অবস্থিত A বিন্দুর প্রতিবিম্ব A_1 গঠিত হইয়াছে। পুনরায় A_1 বিন্দু SO রেখায় প্রতিফলিত হইয়া A´ প্রতিবিম্ব গঠন করিল। সুতরাং PO এবং SO রেখায় পরপর দুইবার প্রতিফলনের ফলে A বিন্দুর চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব A´ পাওয়া গেল। লক্ষ্য কর, A বিন্দুর এই স্থানান্তর একটি নির্দিষ্ট আবর্তন ক্রিয়ার দ্বারা সম্পাদন করা যায়। ঐ আবর্তন ক্রিয়ার আবর্তন কেন্দ্র O এবং আবর্তন কোণের পরিমাপ ∠X.

প্রতিফলনের ধর্ম হইতে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\overline{OA} = \overline{OA_1} = \overline{OA'}$$

এবং $\angle AOP = \angle A_1OP$

$$\angle A_1OS = A'OS.$$

$$\therefore \quad \angle AOA' = \angle AOA_1 + \angle A_1OA'$$

$$= 2\angle A_1OP + 2\angle A_1OS$$

$$= 2\angle POS$$

$$= 2\angle Y.$$

অর্থাৎ আবর্তন কোণ দুই প্রতিফলন রেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের দ্বিগুণ।

অনুসিদ্ধান্ত :

যদি একটি নির্দিষ্ট আবর্তন প্রক্রিয়া R হয় যাহার আবর্তন কেন্দ্র O এবং আবর্তন কোণ একটি নির্দিষ্ট দিকে $\angle X$-এর সমান, তাহা হইলে ঐ আবর্তন প্রক্রিয়া অর্থাৎ Rকে, O বিন্দুতে ছেদ করে এবং একই সমতলে অবস্থিত এইরূপ যে কোন দুইটি প্রতিফলন রেখায় পরপর দুইবার প্রতিফলনের তুল্য ফল মনে করা যাইবে। তবে প্রতিফলন রেখা দুইটির অন্তর্ভূত কোণের পরিমাপের দ্বিগুণ সর্বদা আবর্তন কোণের পরিমাপের সমান হইবে।

যে সমস্ত স্থানান্তর প্রক্রিয়ায় কোন বস্তু বা সামতলিক ক্ষেত্রের আকার ও আকৃতি অপরিবর্তিত থাকে, প্রতিফলন তাহাদের মধ্যে একমাত্র মৌলিক প্রক্রিয়া। চলন এবং আবর্তন প্রক্রিয়া দুইটি প্রতিফলনের সমন্বয়ে গঠিত। কিন্তু এক বা একাধিক চলন কিংবা আবর্তনের দ্বারা কোন নির্দিষ্ট প্রতিফলন ক্রিয়ার তুল্য ফল পাওয়া সম্ভব নহে।

অনুশীলনী

(A)

1. সেট্ কাহাকে বলে ? উদাহরণ সহ বুঝাইয়া দাও।

2. সেটের ধারণা হইতে বিন্দু, রেখা, ত্রিভুজ এবং চতুর্ভুজের ব্যাখ্যা দাও।

3. উপবিন্যাস বলিতে কি বুঝ ? দুইটি সেট্ যথাক্রমে

$$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

এবং $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

$A \cup B$ এবং $A \cap B$ নির্ণয় কর।

4. ম্যাপিং কি ? উপরের উদাহরণে সেট দুইটির মধ্যে ম্যাপিং-এর নিয়মটি কি হইবে ?

5. রেখাংশ এবং রেখার মধ্যে প্রভেদ কি ? উহাদের কিরূপে প্রকাশ করা যায় ? রশ্মি বলিতে কি বুঝ ?

6. স্থানান্তর প্রক্রিয়া কাহাকে বলে ? উহা কয় প্রকার উদাহরণসহ বুঝাইয়া দাও।

7. চিত্রের সাহায্যে নিম্নোক্ত ক্ষেত্রে $A \cup B$ এবং $A \cap B$ কি হইবে দেখাও।

$$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$$

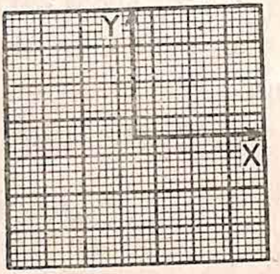
$$B=\{3, 4. 5, 6, 7\}$$

(B)

8. চলন কাহাকে বলে ? চিত্র সহযোগে চলন প্রক্রিয়া ব্যাখ্যা কর।

9. চলন প্রক্রিয়ার ধর্মগুলি বিবৃত কর। প্রতিফলনের সাহায্যে চলন প্রক্রিয়া ব্যাখ্যা কর।

10. ছক কাগজের উপর সুবিধামত দুইটি পরস্পরছেদী লম্ব রেখাকে X এবং Y অক্ষ ধর। এইবার নিম্নলিখিত স্থানান্তর প্রক্রিয়াগুলি সম্পাদন করিয়া প্রতিবিম্বের অবস্থান দেখাও।



চিত্র নং 42

(i) X-অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর একটি বিন্দুর মূলবিন্দু (X এবং Y -অক্ষের ছেদ বিন্দু) হইতে 6 একক দূরে চলন।

(ii) X-অক্ষের ঋণাত্মক দিক বরাবর একটি বিন্দুর মূলবিন্দু হইতে 4 একক দূরে চলন এবং তৎপরে উহার লম্বাভিমুখে Y অক্ষের ধনাত্মক দিকে 5 একক চলন।

(iii) যে কোন একটি ত্রিভুজের প্রাথমিক অবস্থানে উহার ভূমি X-অক্ষ বরাবর এবং ভূমির বিপরীত শীর্ষবিন্দু Y-অক্ষের উপর অবস্থিত। ঐ ত্রিভুজটির Y-অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর 3 একক দূরত্বে চলন।

(iv) একটি আয়তক্ষেত্রের প্রাথমিক অবস্থানে উহার একটি বাহু X-অক্ষ বরাবর। ঐ আয়অক্ষেত্রটিকে প্রথমে Y-অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর 4 একক এবং পরে X অক্ষের ধনাত্মক দিকে 3 একক চলন।

(v) প্রাথমিক অবস্থানে একটি বিন্দু X-অক্ষ হইতে ধনাত্মক দিকে 3 একক দূরে এবং Y-অক্ষ হইতে ধনাত্মক দিকে 4 একক দূরে আছে। বিন্দুটির প্রথমে Y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে 7 একক এবং পরে X-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে 8 একক চলন।

11. প্রতিফলন, চলন এবং আবর্তন প্রক্রিয়ার মধ্যে কোন্‌টি মৌলিক প্রক্রিয়া এবং কেন?

12. আবর্তন কাহাকে বলে? চিত্র সহযোগে আবর্তন ক্রিয়া ব্যাখ্যা কর। একটি নির্দিষ্ট চলন এবং আবর্তন প্রক্রিয়ার জন্য কি বিষয় পূর্বে জানা প্রয়োজন?

13. প্রতিফলনের সাহায্যে কিভাবে আবর্তন ক্রিয়া ব্যাখ্যা করা যায় তাহা চিত্র সহ আলোচনা কর।

14. ছক কাগজে নিম্নলিখিত স্থানান্তর প্রক্রিয়ায় প্রতিবিম্ব কোথায় হইবে চিহ্নিত কর।

(i) X অক্ষের ধনাত্মক দিকে মূলবিন্দু হইতে 5 একক দূরত্বে X-অক্ষের উপর অবস্থিত একটি বিন্দুর, মূলবিন্দুর সাপেক্ষে (*a*) $90°$ কোণে (*b*) $180°$ কোণে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘূর্ণন।

(ii) 6 একক দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট একটি দণ্ডের একপ্রান্ত মূলবিন্দুতে এবং অপর প্রান্ত X-অক্ষের উপরে উহার ধনাত্মক দিক বরাবর স্থাপিত আছে। মূলবিন্দুকে আবর্তন কেন্দ্র ধরিয়া ঐ দণ্ডটিকে প্রথমে $90°$ কোণে ঘড়ি কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তন এবং পরে Y-অক্ষের সমান্তরালভাবে X-অক্ষের ধনাত্মক দিকে 4 একক দূরত্ব চলন।

15. মূলবিন্দুর সাপেক্ষে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে যে কোন একটি আবর্তন প্রক্রিয়াকে দুইটি প্রতিফলনের যুগ্মফলরূপে ছক কাগজের উপর চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ কর।

16. কোন সমতলে অবস্থিত A এবং B দুইটি বিন্দু। একটি নির্দিষ্ট আবর্তনের ফলে উহাদের প্রতিবিম্ব যথাক্রমে A' এবং B' হইলে, আবর্তন কেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় কর।

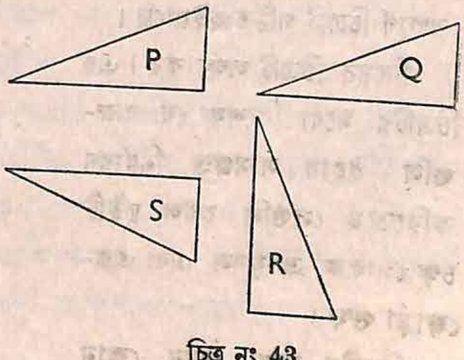
[সংকেত : AA' এবং BB' রেখাংশ দুইটির লম্ব সমদ্বিখণ্ডক দুইটির ছেদ-বিন্দুই নির্ণেয় আবর্তন কেন্দ্র হইবে।]

17. পার্শ্বের ত্রিভুজগুলিকে এক অবস্থান হইতে অন্য অবস্থানে কোন স্থানান্তর প্রক্রিয়া দ্বারা স্থানান্তরিত করা যায় তাহা বল।

(i) P-কে Q-এ

(ii) P-কে R-এ

(iii) P-কে S-এ



চিত্র নং 43

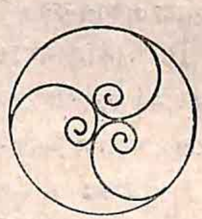
দ্বিতীয় অধ্যায়

ঘূর্ণন প্রতিসাম্য (Rotational Symmetry)

প্রতিসাম্য ঃ

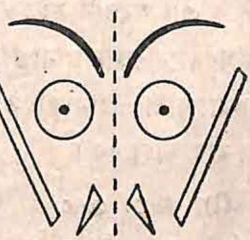
গণিত শাস্ত্রে ব্যবহৃত বিশেষ কয়েকটি কথার মধ্যে "প্রতিসাম্য" শব্দটি খুব গুরুত্বপূর্ণ। আমাদের চারি পার্শ্বের প্রকৃতিতে যে জিনিষটি সচরাচর দৃষ্টিগোচর হয় তাহা হইল বাম-দক্ষিণ প্রতিসাম্য। ইহাকে দ্বি-পার্শ্বীয় প্রতিস্যাম্যও বলা হইয়া থাকে। সমস্ত জীবজন্তুর ক্ষেত্রেই এই বাম-দক্ষিণ প্রতিসাম্য একটি প্রধান বিশেষত্ব। তোমার দেহের বাম এবং ডানদিকের অঙ্গ-প্রত্যঙ্গের সংস্থানের মধ্যে সম্পূর্ণ সামঞ্জস্য নিশ্চয়ই লক্ষ্য করিয়া থাকিবে। বাম হাতটি বড়, ডান হাতটি ছোট অথবা বাম এবং ডান চক্ষুর আকার এবং অবস্থানের মধ্যে সামান্যতম অসঙ্গতিও খুব কমই চোখে পড়ে।

চিত্রকর, স্থপতি এবং আরও বিভিন্ন সৌন্দর্য অনুশীলনকারীদের শিল্পকার্যের প্রধান অঙ্গই হইল প্রতিসাম্য। পার্শ্বের চিত্রটির বাম-দক্ষিণ প্রতিসাম্য নাই বটে তবে তিনটি একই প্রকার অংশের সংযোগে সম্পূর্ণ চিত্রটি গঠিত হইয়াছে।



চিত্র নং 44

নিম্নের চিত্রটি লক্ষ্য কর। এই চিত্রটির মধ্যে বিশেষ যে অঙ্গ-গুলি ইহার সামঞ্জস্য নির্ধারণ করিতেছে সেগুলি হইল দুইটি চক্ষু গোলক, ভ্রু-যুগল এবং এক-জোড়া গুম্ফ।



চিত্র নং 45

চিত্রটির মধ্যে এমন কোন

রেখা চিহ্নিত করিতে পার কি যাহা চিত্রটিকে তুইটি একই প্রকার অংশে বিভক্ত করিবে ?

চিত্রটিতে এমন কোন বিন্দু নির্ধারণ করিতে পার কি যাহার মধ্য দিয়া ঐ রেখাটি গমন করিবে ? স্পষ্টতই বুঝা যায় এমন একটি বিন্দু তুই গোলকের কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখার উপর আছে। এই সরলরেখার উপর ঐ বিন্দুটির যথার্থ অবস্থান সম্পর্কে কিছু বলিতে পার কি ?

প্রতিসম-অক্ষ এবং ঘুর্ণন প্রতিসাম্য ঃ

প্রতিসাম্য বলিতে কি বুঝায় সে সম্পর্কে আশা করি তোমাদের সুস্পষ্ট ধারণা হইয়াছে। এইবার ঘুর্ণন প্রতিসাম্যের প্রসঙ্গে আসা যাক্। অতি নিম্নস্তরের প্রাণী জলে ভাসমান ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র কীট ইত্যাদি যে সমস্ত প্রাণী নিজেরা দেহ চালনায় অক্ষম তাহাদের আকার সাধারণত গোলীয় হইয়া থাকে। উদ্ভিদেরা মুলের সাহায্যে মাটি আঁকড়াইয়া কোন উল্লম্ব (ভূমির উপর লম্ব) তল সাপেক্ষে নিজ দেহের প্রতিসাম্য বজায় রাখে। একটি ছাতার কথা চিন্তা কর। খোলা অবস্থায় ছাতার উল্লম্ব লাঠিটির সাপেক্ষে ছাতাটিকে ঘুরাইলে ছাতাটির আকৃতি সম্পূর্ণ অপরিবর্তিতই থাকে। এস্থলে বলা হয় যে ঐ উলম্ব লাঠিটির সাপেক্ষে ছাতার ঘুর্ণন প্রতিসাম্য আছে। উল্লম্ব লাঠিটি হইল ছাতার প্রতিসম-অক্ষ।



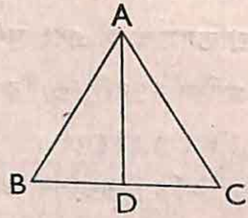
চিত্র নং 46

দেহ সঞ্চালনে সক্ষম প্রাণীদেহের ক্ষেত্রে উল্লম্ব তল বরাবর কোন অক্ষের সাপেক্ষে দেহের প্রতিসাম্য থাকে।

নিম্নে কতকগুলি জ্যামিতিক চিত্রের ঘূর্ণন প্রতিসাম্য আলোচনা করা হইল।

(1) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ঃ

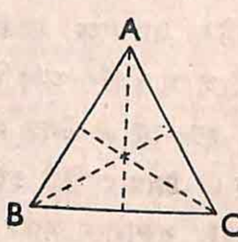
কাগজের তৈয়ারী একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্ব সরলরেখা বরাবর ত্রিভুজটিকে ভাঁজ কর। দেখিবে B বিন্দু C বিন্দুর উপর সমাপতিত হইবে এবং AB বাহুটি AC বাহুর সহিত মিলিয়া যাইবে। অর্থাৎ ঐ সরলরেখার সাপেক্ষে ত্রিভুজটির প্রতিসাম্য রহিয়াছে। উহাকে অক্ষ করিয়া ত্রিভুজটি আবর্তিত হইলে উহার আকৃতির কোনরূপ পরিবর্তন পরিলক্ষিত হইবে না।



চিত্র নং 47

(2) সমবাহু ত্রিভুজ ঃ

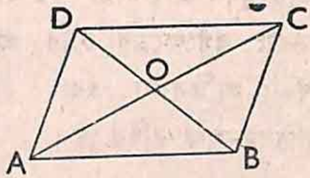
এই ত্রিভুজের যে কোন শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব টানিলে যে সরলরেখা তিনটি পাওয়া যায় তাহাদের যে কোন একটিকে অক্ষ করিয়া ত্রিভুজটি আবর্তিত হইলে উহার আকৃতি অপরিবর্তিত থাকিবে। সুতরাং সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের তিনটি প্রতিসম-অক্ষ রহিয়াছে।



চিত্র নং 48

(৩) সামান্তরিক :

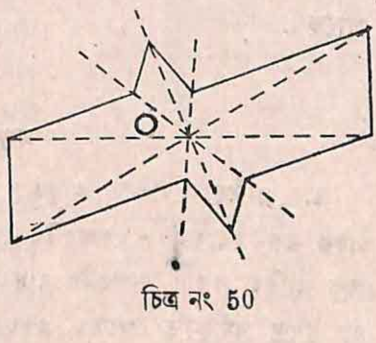
পার্শ্বের চিত্রে সামান্তরিকটির DB কর্ণের মধ্যবিন্দু O। এই বিন্দুর সাপেক্ষে সামান্তরিকটির অর্ধেক আবর্তনের ফলে, A বিন্দু C বিন্দুতে এবং C বিন্দু A বিন্দুতে যাইবে। অতএব, A, O এবং C বিন্দু একই সরলরেখায় আছে এবং AO = OC.



চিত্র নং 49

কাজেই কর্ণদ্বয়ের সাপেক্ষে সামান্তরিকের ঘূর্ণন প্রতিসাম্য বজায় থাকে। যে সমস্ত জ্যামিতিক চিত্রের দুই প্রকার ঘূর্ণন প্রতিসাম্য আছে, নিম্নোক্ত সহজ উপায়ে তাহাদের চিত্র অঙ্কন করা যাইতে পারে।

O বিন্দুর মধ্য দিয়া কতকগুলি সরলরেখা টানিয়া প্রতিটি রেখার উপর O বিন্দু হইতে সমান দূরে দুইটি করিয়া বিন্দু লও। ঐ বিন্দুগুলি পরপর সংযুক্ত করিয়া যে চিত্র পাইবে তাহার দুই প্রকার ঘূর্ণন প্রতিসাম্য থাকিবে।



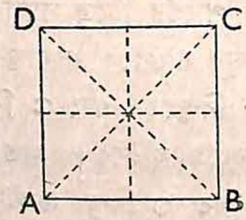
চিত্র নং 50

পার্শ্বের চিত্রে এইরূপ একটি উদাহরণ দেখান হইল।

(4) বর্গক্ষেত্র :

বর্গক্ষেত্রের চারিটি বাহুই সমান। অতএব, ইহার যে কোন দুই বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয় সংযুক্ত করিয়া যে দুইটি সরল-

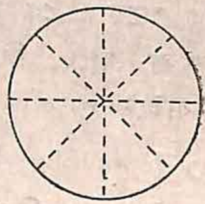
রেখা পাওয়া যাইবে তাহাদের সাপেক্ষে অর্ধেক আবর্তনে ইহার আকৃতি অপরিবর্তিত থাকিবে। আবার কর্ণদ্বয়ের সাপেক্ষেও ইহার ঘুর্ণন প্রতিসাম্য বর্তমান। সুতরাং বর্গক্ষেত্রের চারি প্রকার ঘুর্ণন প্রতিসাম্য এবং চারিটি প্রতিসম-অক্ষ রহিয়াছে।



চিত্র নং 51

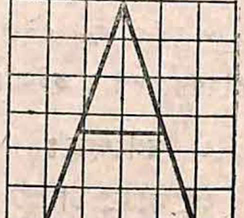
(5) **বৃত্ত :**

চিত্র হইতে স্পষ্টই বুঝা যাইতেছে যে বৃত্তের যে কোন ব্যাস সাপেক্ষে আবর্তনের ফলে উহার আকৃতি অপরিবর্তিত থাকিবে। সুতরাং বৃত্তের অসংখ্য প্রতিসম-অক্ষ আছে।

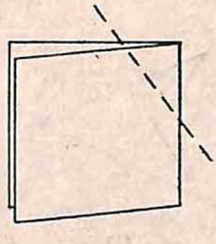

চিত্র নং 52

অনুশীলনী

1. প্রতিসাম্য বলিতে কি বুঝ? প্রতিসম অক্ষ কাহাকে বলে? নিম্নে প্রদত্ত বড় হরফের A অক্ষরটির প্রতিসম-অক্ষ বাহির কর। অক্ষরটির বাম দিকের পাদ বিন্দু বর্গাকৃতি ক্ষেত্রের একঘর বাম দিকে সরাইলে শীর্ষবিন্দু, বাম বাহুর মধ্যবিন্দু এবং প্রতিসম-অক্ষের কিরূপ পরিবর্তন হইবে দেখাও।

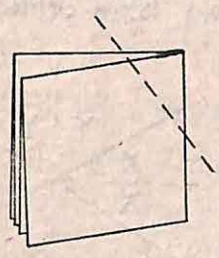

চিত্র নং 53

2. নিম্নে প্রদর্শিত চিত্র অনুযায়ী এক টুকরা বর্গাকার কাগজ সমান দুই ভাঁজ কর। চিত্রে চিহ্নিত রেখাংশ অনুযায়ী উহার এক প্রান্ত কাঁচি দিয়া কাটিয়া লও। এই অংশটুকুর ভাঁজ খুলিয়া লইলে কি পাইবে? কর্তিত অংশটুকুর বাহু এবং কোণগুলি মাপিয়া প্রাপ্ত জ্যামিতিক চিত্রটি সম্পর্কে তুমি কি মন্তব্য করিতে পার? ঐ চিত্রের সহিত ভাঁজ বরাবর সরলরেখাটির সম্পর্ক কি? ভাঁজের দুই পার্শ্বস্থ ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে কোন সম্পর্ক আছে কি? ভাঁজ করা কাগজটির কোন এক প্রান্তে কোণাকোণি ভাবে কাটিয়া এমন কোন জ্যামিতিক চিত্র পাইতে পার কি যাহার একটি কোণ এক সমকোণ?



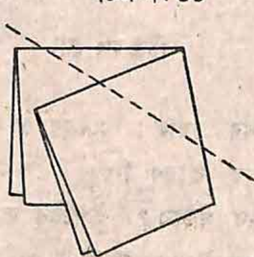
চিত্র নং 54

3. একখণ্ড বর্গাকার কাগজকে সমান চার ভাঁজে ভাঁজ করিয়া চিত্রানুযায়ী উহার একটি প্রান্ত কাটিয়া লও। এইবার কর্তিত অংশের ভাঁজ খুলিয়া লইলে কি পাইবে? ভাঁজ বরাবর সরলরেখাগুলির সহিত প্রাপ্ত চিত্রটির সম্পর্ক কি? ভাঁজ করা কাগজটিকে কিভাবে কাটিলে তুমি একটি বর্গক্ষেত্র পাইবে?



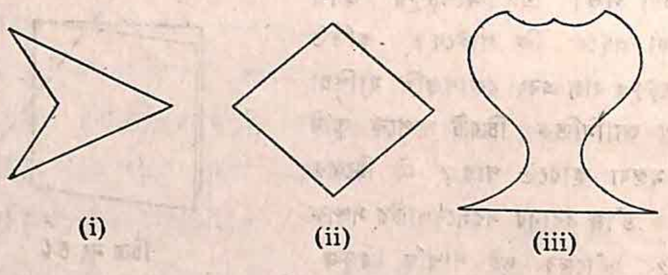
চিত্র নং 55

4. একখণ্ড বর্গাকার কাগজকে সমান চার ভাঁজ কর। এইবার ভাঁজ করা একটি অংশ তির্যকভাবে রাখিয়া চিত্রানুযায়ী প্রান্তটি কাটিয়া লও। কর্তিত অংশটির কয়টি প্রতিসম-অক্ষ থাকিবে?



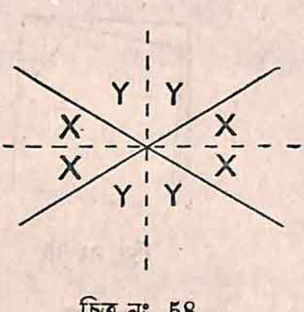
চিত্র নং 56

5. ঘূর্ণন প্রতিসাম্য বলিতে কি বুঝ ? নিম্নের চিত্রগুলির প্রতিসম-অক্ষ বাহির কর।

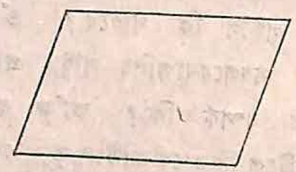


চিত্র নং 57

6. নিম্নে দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখা দেখান হইয়াছে। উৎপন্ন চিত্রটির দুইটি অক্ষ আছে। কাগজ ভাঁজ করিয়া দেখান যাইতে পারে যে চিত্রে Y চিহ্নিত কোণগুলি পরস্পর সমান। অনুরূপে X চিহ্নিত কোণগুলিও



চিত্র নং 58



চিত্র নং 59

পরস্পর সমান। X-এর Y কোণ দুইটি মাপ। X+Y=কত ? এইরূপ হইবার কারণ কি ? কোন চিত্রের দুইটি প্রতিসম-অক্ষ থাকিলেই কি এইরূপ ঘটিবে ? উপরের ডান পার্শ্বের চিত্রটির প্রতিসম অক্ষ বাহির করিয়া তোমার উত্তরের যথার্থতা পরীক্ষা কর।

তৃতীয় অধ্যায়

জ্যামিতিক চিত্রের সর্বসমতা

তোমরা পূর্ব অধ্যায়ে জানিয়াছ যে প্রতিসম-অক্ষ কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজকে এমন দুই অংশে বিভক্ত করে যাহাদের আকার এবং আয়তন সমান। দুইটি জ্যামিতিক চিত্রের আকার এবং আয়তন একই হইলে অর্থাৎ উহাদের অঙ্গগুলি পরস্পর সমান হইলে উহাদিগকে সর্বসম চিত্র বলা হয়।

দুইটি রেখাংশের সর্বসমতা ঃ

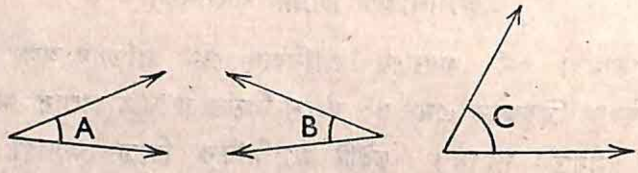
যেহেতু কোন রেখাংশ একটি জ্যামিতিক চিত্র, অতএব "দুইটি রেখাংশের সর্বসমতা" কথাটি অর্থহীন হইবে না। রেখাংশের একটিই অঙ্গ (অর্থাৎ দৈর্ঘ্য) থাকায় দুইটি সমান দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট রেখাংশকে আমরা সর্বসম বলিব।

এক্ষেত্রে $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$ দ্বারা আমরা বুঝিব যে PQ এবং RS রেখাংশ দুইটি সর্বসম। দুইটি জ্যামিতিক চিত্র পরস্পর সমান বুঝাইতে "$\cong$" এই চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়। কিন্তু রেখাংশ PQ এবং রেখাংশ QP দ্বারা একই জ্যামিতিক চিত্রকে বুঝান হইয়া থাকে। এই কারণে $\overline{PQ} \cong \overline{QP}$-এর পরিবর্তে $\overline{PQ} = \overline{QP}$ লেখা যাইতে পারে।

দুইটি কোণের সর্বসমতা ঃ

কোণ একটি জ্যামিতিক চিত্র। কোণেরও একটি মাত্র অঙ্গ থাকায় দুইটি সমান পরিমাপের কোণকে আমরা সর্বসম বলিতে পারি।

A এবং B কোণ দুইটির পরিমাপ একই। এক্ষেত্রে আমরা



চিত্র নং 60

বলিতে পারি A এবং B কোণ দুইটি সর্বসম অর্থাৎ $\angle A \equiv \angle B$. কিন্তু A কোণটি C কোণের সহিত সর্বসম নহে।

দুইটি ত্রিভুজের সর্বসমতা :

গণিতশাস্ত্রে এবং বিভিন্ন কারিগরী বিদ্যায় প্রায়শঃই বিভিন্ন ত্রিভুজ লইয়া আলোচনা করা আবশ্যক হয়। কাজেই কোন্ অবস্থায় দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হইবে তাহা জানা দরকার। রেখাংশ এবং কোণের সর্বসমতার জন্য প্রয়োজনীয় সর্ত অপেক্ষা দুইটি ত্রিভুজের সর্বসমতার জন্য কিছু অতিরিক্ত সর্ত আবশ্যক।

কাগজের উপর ABC একটি ত্রিভুজ অংকন কর। এইবার একটি ট্রেসিং কাগজ ABC ত্রিভুজের উপর রাখিয়া একটি পিন দ্বারা উহার কৌণিক বিন্দুগুলি চিহ্নিত কর। মনে কর, অনুরূপ বিন্দুগুলি D, E এবং F. এইবার DE, EF এবং FD সংযুক্ত কর।

চাঁদা এবং মাপনীর সাহায্যে নিম্নলিখিতগুলি পরীক্ষা করিয়া দেখ।

$\overline{AB} = \overline{DE}$

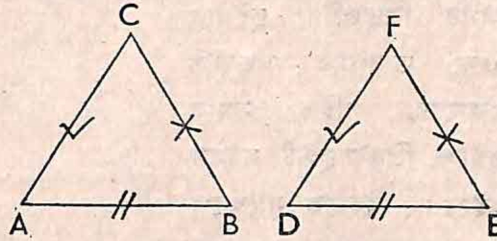
$\overline{BC} = \overline{EF}$

এবং $\overline{CA} = \overline{FD}$

আবার, $\angle B = \angle E$

$\angle C = \angle F$

$\angle A = \angle D$.



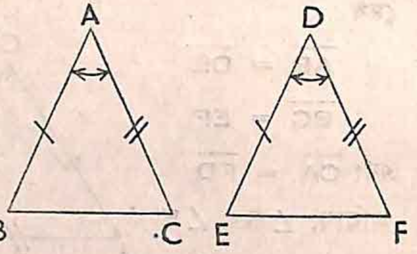
চিত্র নং 61

এক্ষেত্রে ABC এবং DEF ত্রিভুজ দুইটির আকার এবং আয়তন সমান হইবে। অর্থাৎ ABC এবং DEF ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। দুইটি ত্রিভুজের উপরোক্ত ছয়টি অঙ্গ অর্থাৎ একটির তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণ যথাক্রমে অন্যটির তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণের সঙ্গে সমান হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

ত্রিভুজের সর্বসমতা সম্পর্কে নিম্নলিখিত সিদ্ধান্ত গুলিকে স্বীকার্য হিসাবে গ্রহণ করা হইয়াছে।

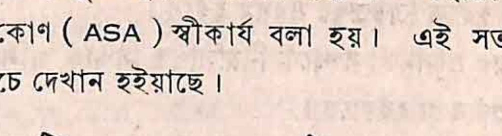
(i) দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির তিনটি বাহু যথাক্রমে অপর ত্রিভুজটির তিনটি বাহুর সহিত সর্বসম হইলে, ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে। পরবর্তী অধ্যায়ে তোমরা শিখিবে কি করিয়া একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সমান করিয়া অপর একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হয়। ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটির সমান বাহু বিশিষ্ট DEF ত্রিভুজ অঙ্কন করিয়া দেখিবে উহার কোণগুলিও ABC ত্রিভুজের কোণ তিনটির সহিত সমান হইয়াছে। অর্থাৎ ABC এবং DEF ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে। এই স্বীকার্যটিকে সংক্ষেপে বাহু-বাহু-বাহু (SSS) স্বীকার্য বলা হয়।

(ii) দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির দুইবাহু এবং তাহাদের অন্তর্ভূর্ত কোণ যথাক্রমে অপর ত্রিভুজটির দুইবাহু এবং তাহাদের অন্তর্ভূর্ত কোণের সহিত সমান হইলে, ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে। ইহাকে সংক্ষেপে বাহু-কোণ-বাহু (SAS) স্বীকার্য বলা হয়। উপরের চিত্রে এইরূপ দুইটি সর্বসম ত্রিভুজ দেখান হইয়াছে।



চিত্র নং 62

(iii) দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির দুইটি কোণ এবং একটি বাহু যথাক্রমে অপর ত্রিভুজটির দুইটি কোণ এবং **অনুরূপ বাহুর** সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে। ইহাকে সংক্ষেপে কোণ-বাহু-কোণ (ASA) স্বীকার্য বলা হয়। এই সর্তটি চিত্রের সাহায্যে নিচে দেখান হইয়াছে।



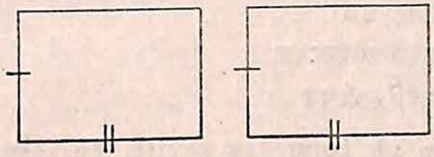
চিত্র নং 63

দ্রষ্টব্য: 1. দুইটি ত্রিভুজের সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুগুলিকে অনুরূপ বাহু বলা হয়।

2. একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের সহিত সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী ত্রিভুজ বা সংক্ষেপে সদৃশ ত্রিভুজ বলা হয়।

আয়তক্ষেত্রের সর্বসমতা ঃ

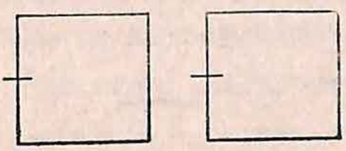
একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ যথাক্রমে অপর আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের সহিত সমান হইলে আয়তক্ষেত্র তুইটিকে সর্বসম বলা হয়।



চিত্র নং 64

বর্গক্ষেত্রের সর্বসমতা ঃ

বর্গক্ষেত্রের চারিটি বাহুই সমান। স্থতরাং একটি বর্গক্ষেত্রের যে কোনও একটি বাহু অপর একটি বর্গক্ষেত্রের যে কোন একটি বাহুর স।হত সমান হইলে বর্গক্ষেত্র তুইটি সর্বসম হইবে।



চিত্র নং 65

বৃত্তের সর্বসমতা ঃ

তুইটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান হইলে বৃত্ত তুইটি সর্বসম হইবে।

অনুশীলনী

1. দুইটি সামতলিক জ্যামিতিক চিত্রের সর্বসমতা বলিতে কি বুঝায়? দুইটি রেখাংশ এবং দুইটি কোণের সর্বসমতা ব্যাখ্যা কর।

2. দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হইবার স্বীকার্যগুলি কি কি?

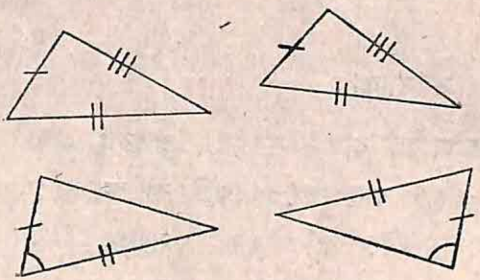
3. নিম্নলিখিত জ্যামিতিক চিত্রগুলি কখন সর্বসম হইবে?

(i) দুইটি বৃত্ত

(ii) দুইটি আয়তক্ষেত্র

(iii) দুইটি বর্গক্ষেত্র

4. নিম্নে যে দুই জোড়া ত্রিভুজের চিত্র দেওয়া হইল তাহাদের কোন্ জোড়াটি কোন্ স্বীকার্য্য বলে সর্বসম হইবে বল।



চিত্র নং 66

চতুর্থ অধ্যায়

বিভিন্ন অঙ্গ-বিশিষ্ট ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ অঙ্কন

দৈনন্দিন জীবনে তোমাদের চারিপাশে কত লোক কত বিভিন্ন ভাবে জ্যামিতির ব্যবহার করিয়া সহজে তাহাদের প্রয়োজনীয় কার্য সম্পন্ন করিতেছে তাহা তোমরা লক্ষ্য করিয়া থাক। রাজমিস্ত্রী, স্বর্ণকার, কর্মকার, ছুতোর প্রভৃতি সকলেই জ্যামিতির ব্যবহারের দ্বারা উপকৃত হইতেছে। বৈজ্ঞানিক, পূর্তবিদ্, শিল্পী প্রভৃতি যাহারা সভ্যতা ও কৃষ্টিকে অগ্রগতির দিকে লইয়া চলিয়াছেন, তাহাদের কাছেও জ্যামিতির জ্ঞান অপরিহার্য। ১২।১৩ বৎসরের শিশুদের যুক্তি-শক্তি বিশেষ উন্নত নহে। তাহারা হাতে-কলমে কাজ করিতে ভালবাসে তাই হাতে-কলমে কাজের মাধ্যমে তাহারা যে অভিজ্ঞতা অর্জন করে তাহা শিশুদের মনে অতি সহজে রেখাপাত করে। এইভাবে শিক্ষা গ্রহণ করিলে তাহাদের আগ্রহও বৃদ্ধি পায়। বিভিন্ন জ্যামিতিক চিত্রের সঠিক অঙ্কন জ্যামিতি শিক্ষার একটি বিশেষ অঙ্গ। বিভিন্ন জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কনের জন্য রুলার, কম্পাস, চাঁদা, ডিভাইডার প্রভৃতি বিভিন্ন যন্ত্রের ব্যবহার পদ্ধতি তোমরা ষষ্ঠ শ্রেণীতে শিখিয়াছ। মনে রাখিবে যে, বিশুদ্ধ জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কনে রুলার ও কম্পাস ভিন্ন অন্য কোন যন্ত্র ব্যবহার করা চলিবে না। বর্তমান অধ্যায়ে সম্পাদ্যের আলোচনায় সকল অঙ্কন কার্যে শুধু মাত্র রুলার ও কম্পাস ব্যবহার করা হইবে।

রুলারের সাহায্যে কোন সমতলস্থিত দুইটি বিন্দুকে সংযুক্ত করা, কোন নির্দিষ্ট মাপের রেখাংশ অঙ্কন কিংবা কোন সরলরেখাকে প্রয়োজন বোধে যে কোন দিকে বর্ধিত করা হইয়া থাকে।

কম্পাসের সাহায্যে কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন নির্দিষ্ট পরিমাপের ব্যাসার্ধ লইয়া একটি সমগ্র বৃত্ত বা কোন একটি বৃত্ত চাপ অঙ্কন করা হইয়া থাকে।

সম্পাদ্য বিষয়ক প্রশ্নের সমাধান ঃ

কোন সামতলিক জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কনের জন্য প্রদত্ত বিষয়-গুলিকে উপাত্ত (Data) বলে। সম্পাদ্য সমাধানের জন্য দুইটি প্রণালী প্রচলিত আছে। একটিকে বলা হয় সংশ্লেষণ (Synthesis) প্রণালী এবং অপরটিকে বিশ্লেষণ (Analyis) প্রণালী বলা হয়।

প্রদত্ত উপাত্ত হইতে বিচার ও যুক্তির সাহায্যে নির্ণেয় বিষয়ে উপনীত হইবার প্রণালীকে সংশ্লেষণ প্রণালী বলে। এবং নির্ণেয় বিষয়টিকে সর্বপ্রথমে সত্য বলিয়া গ্রহণ করিয়া যুক্তির সাহায্যে প্রদত্ত উপাত্তে উপনীত হইবার প্রণালীকে বিশ্লেষণ প্রণালী বলে। সাধারণ ক্ষেত্রে প্রথম প্রণালী অর্থাৎ, সংশ্লেষণ প্রণালীই অবম্বলন করা হইয়া থাকে।

অঙ্কনের ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত বিষয়গুলির প্রতি বিশেষ দৃষ্টি রাখিবে।

(i) অঙ্কনের সকল চিহ্ন চিত্রে প্রদর্শন করিতে হইবে।

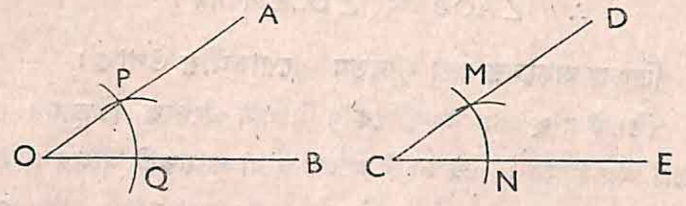
(ii) সকল অঙ্কন কার্যের বিস্তৃত বিবরণ লিখিতে হইবে।

(iii) নির্ণেয় সমাধান যে নির্ভুল হইয়াছে তাহা প্রমাণ করিতে হইবে।

(iv) অঙ্কন চিহ্নসহ সমগ্র চিত্র যাহাতে যথা সম্ভব পরিচ্ছন্ন ও স্পষ্ট হয় সেদিকে লক্ষ্য রাখিতে হইবে।

সম্পাদ্য 1

একটি কোণের সর্বসম অপর একটি কোণ অঙ্কন করিতে হইবে।



চিত্র নং 67

মনে কর ∠AOB কোণটি প্রদত্ত এবং উহার সর্বসম একটি কোণ অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন প্রণালীঃ রুলারের সাহায্যে $\overline{CE}$ একটি রেখাংশ অঙ্কন কর। O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া সুবিধা মত যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া PQ বৃত্ত চাপ অঙ্কন কর। এক্ষণে C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া পূর্বের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন কর। ইহা যেন $\overline{CE}$ কে N বিন্দুতে ছেদ করিল। এইবার N বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া $\overline{PQ}$ এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর যাহা ঐ চাপকে M বিন্দুতে ছেদ করে। C ও M বিন্দুকে যুক্ত করিয়া D পর্যন্ত বর্ধিত কর। তাহা হইলে ∠DCE ও ∠AOB সর্বসম হইবে।

প্রমাণ ঃ অঙ্কন অনুসারে PQ এবং MN চাপ দুইটি যে-দুইটি বৃত্তের চাপ তাহারা সর্বসম। কারণ উহাদের ব্যাসার্ধের পরিমাপ সমান।

আবার, যেহেতু $\overline{PQ} \equiv \overline{MN}$, সেইহেতু PQ চাপ = MN চাপ।

তোমরা পরে জানিবে যে, দুইটি সর্বসম বৃত্তের সমান সমান চাপে কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাহারা সর্বসম।

$\therefore$ $\angle AOB$ এবং $\angle DCE$ সর্বসম।

ত্রিভুজ অঙ্কনের জন্য ন্যূনতম প্রয়োজনীয় উপাত্ত।

তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণ মিলিয়া প্রত্যেক ত্রিভুজের মোট ছয়টি অঙ্গ আছে। এই ছয়টি অঙ্গের মধ্যে কয়েকটি অঙ্গের পরিমাপ দেওয়া থাকিলে তাহা হইতে ত্রিভুজটি অঙ্কন করা যায়। কোন একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের কয়েকটি অঙ্গের পরিমাপ বলা হইলে সঙ্গে সঙ্গে সকল অঙ্গ-বিশিষ্ট ঐ ত্রিভুজটির ছবি আমরা কল্পনা করিতে পারি। ত্রিভুজটির যে ছবি আমাদের মনে ভাসিয়া ওঠে, প্রদত্ত অঙ্গ-বিশিষ্ট যে ত্রিভুজটি আমরা অঙ্কন করিব তাহা সেই ছবিরই একটি প্রতিচ্ছবি হইবে। জ্যামিতির ভাষায় এই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে। সুতরাং ত্রিভুজ অঙ্কনের জন্য ন্যূন্যতম অঙ্গ অর্থাৎ উপাত্ত এমন হইতে হইবে যাহার দ্বারা প্রত্যক্ষ বা পরোক্ষ ভাবে দুইটি ত্রিভুজের সর্বসমতা বিষয়ক স্বীকার্যগুলি পাওয়া যায়।

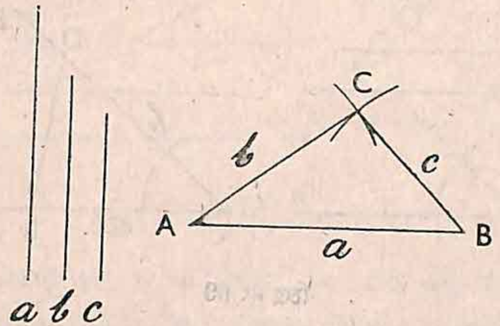
এই বিষয়ের প্রাত লক্ষ্য রাখিয়া কতিপয় ত্রিভুজ অঙ্কন প্রণালী দেখান হইল।

সম্পাদ্য 2

একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে যাহার বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b, c প্রদত্ত আছে।

অঙ্কন প্রণালী ঃ প্রদত্ত a বাহুর সমান দৈর্ঘ্যের একটি রেখাংশ AB অঙ্কন কর। ইহার পর A এবং B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে b বাহু ও c বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া এইরূপ



চিত্র নং 68

দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর যাহারা পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে। A এবং B বিন্দু দুইটি C বিন্দুর সহিত সরল রেখাংশ দ্বারা যুক্ত কর। তাহা হইলে △CAB-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

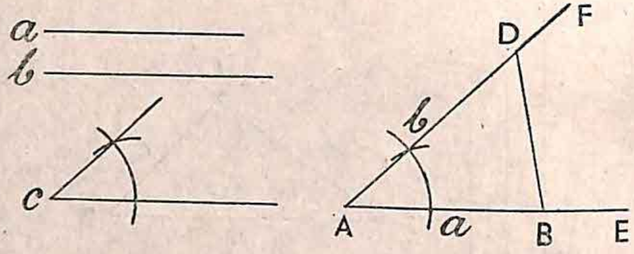
প্রমাণ ঃ অঙ্কন অনুসারে $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = b$ এবং $\overline{BC} = c$ সুতরাং CAB ত্রিভুজটির AB, AC ও BC বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c-এর দৈর্ঘ্যের সহিত সমান।

সম্পাদ্য 3

একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ প্রদত্ত আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

মনে কর যে ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে তাহার দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য a এবং b ও দুই বাহুর অন্তর্ভুক্ত কোণ c প্রদত্ত আছে।

অঙ্কন প্রণালী ঃ যে কোন একটি সরল রেখা AE অঙ্কন করিয়া উহা হইতে প্রদত্ত a বাহুর দৈর্ঘ্যর সমান করিয়া AB রেখাংশ কাট। AB সরলরেখার A বিন্দুতে প্রদত্ত c কোণের সমান করিয়া ∠FAB



চিত্র নং 69

অঙ্কন কর। AF সরলরেখা হইতে b-এর দৈর্ঘ্যের সমান করিয়া AD অংশ কাটিয়া লও এবং B ও D বিন্দু দুইটি সরলরেখা দ্বারা সংযুক্ত কর। তাহা হইলে △DAB-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

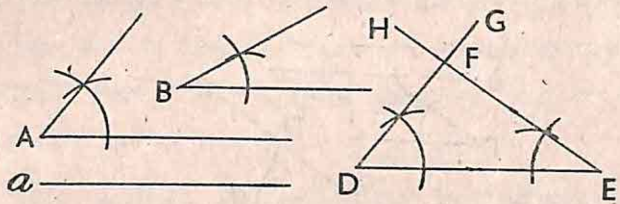
প্রমাণ ঃ অঙ্কন অনুসারে, △DAB-এর AB বাহু ≡ a এবং AD বাহু ≡ b। আবার AD ও AB বাহুর অন্তর্ভূত ∠DAB ≡ ∠c [প্রদত্ত]

সম্পাদ্য 4

একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং ঐ কোণদ্বয় সংলগ্ন বাহুটি প্রদত্ত আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

মনে কর ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য a এবং ঐ বাহুর সংলগ্ন ∠A এবং ∠B প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন প্রণালী ঃ a দৈর্ঘ্যের সমান $\overline{DE}$ অঙ্কন কর এবং উহার একই পার্শ্বে D ও E বিন্দুতে যথাক্রমে প্রদত্ত ∠A ও ∠B-র সমান



চিত্র নং 70

করিয়া ∠GDE এবং ∠HED অঙ্কন কর। DG এবং EH সরলরেখা দুইটি F বিন্দুতে ছেদ করিল। উপরের চিত্রে △FDE উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

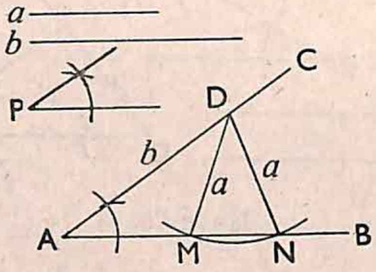
প্রমাণ ঃ অঙ্কন অনুসারে $\overline{DE} \equiv a$ এবং DE বাহুর সংলগ্ন ∠FDE ≡ ∠A এবং ∠FED ≡ ∠B

সম্পাদ্য 5

একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও তাহাদের যে কোন একটি বাহুর বিপরীত কোণ প্রদত্ত আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

মনে কর যে ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে তাহার দুইটি প্রদত্ত বাহুর দৈর্ঘ্য a এবং b-এর সমান এবং aর বিপরীত ∠P দেওয়া আছে।

অঙ্কন প্রণালী ঃ AB একটি সরলরেখা অঙ্কন করিয়া উহার A বিন্দুতে প্রদত্ত P কোণের সর্বসম ∠BAC অঙ্কন কর। $\overline{AC}$ হইতে b-এর দৈর্ঘ্যের সমান করিয়া AD কাটিয়া লও। D বিন্দুকে



চিত্র নং 71

কেন্দ্র করিয়া aর দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত করিলে উহা AB সরলরেখাকে M ও N বিন্দুতে ছেদ করিল। D বিন্দুর সহিত M ও N বিন্দু দুইটি সরলরেখা দ্বারা যুক্ত কর। তাহা হইলে △DAM এবং △DAN উভয়েই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ ঃ অঙ্কন অনুসারে △DAM-এর AD বাহু$\equiv b$, DM বাহু$\equiv a$ এবং DM বাহুর বিপরীত ∠DAM≡প্রদত্ত ∠P. আবার, △DAN-এর AD বাহু$\equiv b$, DN বাহু$\equiv a$ এবং DN বাহুর বিপরীত ∠DAN≡প্রদত্ত ∠P

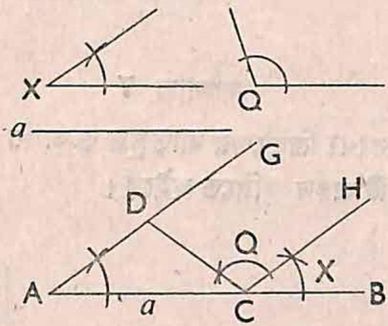
দ্রষ্টব্য ঃ এক্ষেত্রে যে উপাত্ত দেওয়া আছে তাহা হইতে দুইটি সমাধান পাওয়া গেল ; কারণ একই উপাত্ত হইতে △DAM ও △DAN অঙ্কিত হইয়াছে। যে সকল প্রশ্নের এইরূপ দুইটি উত্তর সম্ভব তাহাদিগকে দ্ব্যর্থবোধক প্রশ্ন বলা হয়।

সম্পাদ্য 6

একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং উহাদের মধ্যে একটি কোণের বিপরীত বাহু প্রদত্ত আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

মনে কর যে ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে তাহার দুইটি কোণ যথাক্রমে প্রদত্ত ∠X ও ∠Q-এর সর্বসম এবং ∠Q-এর বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য a-র সমান।

অঙ্কন প্রণালী ঃ AB একটি সরল রেখা টান উহা হইতে $\overline{AC}$ এইরূপে কাটিয়া লও যাহাতে $\overline{AC}=a$ হয়। A বিন্দুতে ∠X-এর



চিত্র নং 72

সর্বসম করিয়া ∠CAG অঙ্কন কর। C বিন্দুতে ∠X এর সর্বসম করিয়া ∠BCH এবং ∠Q-এর সর্বসম করিয়া ∠HCD অঙ্কন কর। CD সরলরেখা যেন AG সরলরেখাকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে △ADC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ ঃ এই অঙ্কনটি সঠিক হইল কিনা তাহা প্রমাণের জন্য একটি নূতন বিষয় জানা প্রয়োজন, তাহা এই যে কোন ত্রিভুজের তিনটি অন্তঃকোণের সমষ্টি সর্বদা 180° হয়।

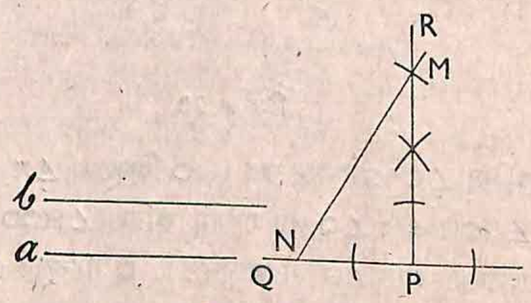
সুতরাং $\triangle DAC$-এর $\angle DAC + \angle ACD + \angle ADC = 180°$।
আবার, $\angle ACD + \angle DCH + \angle HCB = \angle ACB = 180°$ [কারণ $\angle ACB$ একটি সরল কোণ]

সুতরাং $\angle DAC + \angle ACD + \angle ADC = \angle ACD + \angle DCH + \angle HCB$। কিন্তু, $\angle DAC$ এবং $\angle HCB$ প্রত্যেকেই $\angle X$-এর সহিত সর্বসম। সুতরাং $\angle DAC \equiv \angle HCB \equiv \angle X$। অতএব প্রমাণিত হয় যে, $\angle ADC \equiv \angle DCH \equiv \angle Q$।

সুতরাং $\triangle DAC$-এর $\angle DAC \equiv \angle X$, $\angle ADC \equiv \angle Q$ এবং $\overline{AC} \equiv a$

সম্পাদ্য 7

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর একটি বাহু প্রদত্ত আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।



চিত্র নং 73

এইরূপ একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে যাহার অতিভুজ b এবং অপর একটি বাহু a প্রদত্ত আছে।

অঙ্কন প্রণালী ঃ PQ একটি সরল রেখা টান। উহার P বিন্দুতে PQ এর উপর PR লম্ব টান। PR সরল রেখা হইতে প্রদত্ত a বাহুর সমান দৈর্ঘ্যের $\overline{PM}$ কাটিয়া লও। এক্ষণে M বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া প্রদত্ত অতিভুজ b-এর দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া এমন একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন কর যাহা PQ সরল রেখাকে N বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে △MPN উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ ঃ অঙ্কন অনুসারে △MPN-এর ∠MPN-এর পরিমাপ $=1$ সমকোণ, অতিভুজ $\overline{MN} \equiv b$ এবং বাহু $\overline{MP} \equiv a$

∴ △ MPN উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ ;

চতুর্ভুজ অঙ্কন

মনে রাখিবে যে, কোন একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকিলে সেই ত্রিভুজটি অঙ্কন করা সম্ভব। কিন্তু একটি চতুর্ভুজের চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য প্রদত্ত থাকিলে শুধু মাত্র এই উপাত্ত হইতে চতুর্ভুজটি অঙ্কন করা সম্ভব নহে। একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ অঙ্কন করিতে হইলে কমপক্ষে প্রত্যক্ষ বা পরোক্ষ ভাবে পাঁচটি স্বতন্ত্র উপাত্তের প্রয়োজন।

বর্তমান অধ্যায়ে এইরূপ পাঁচটি প্রদত্ত উপাত্ত হইতে কয়েকটি চতুর্ভুজ অঙ্কন প্রণালী দেখান হইল।

সম্পাদ্য ৪

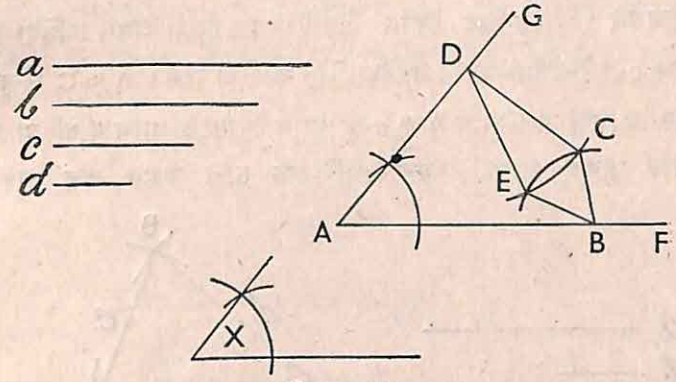
একটি চতুর্ভুজের চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং একটি কোণ প্রদত্ত আছে; চতুর্ভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

মনে কর a, b, c, d প্রদত্ত চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং a ও b বাহু দুইটির অন্তর্ভূত কোণ X।

চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন ঃ AF একটি সরল রেখা টান এবং উহা হইতে a বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান করিয়া $\overline{AB}$ কাটিয়া লও। AB রেখার A বিন্দুতে প্রদত্ত ∠X-এর সর্বসম ∠GAB অঙ্কন কর। AG সরলরেখা হইতে b বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান করিয়া $\overline{AD}$ অংশ কাটিয়া লও। এক্ষণে B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া d বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া এবং

D বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া c বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া এমন দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কন কর যাহারা পরস্পরকে C এবং E বিন্দুতে ছেদ



চিত্র নং 74

করে। C এবং E বিন্দুর সহিত B ও D বিন্দু সরল রেখা দ্বারা সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABCD অথবা ABED অভীষ্ট চতুর্ভুজ হইবে।

প্রমাণঃ অঙ্কন অনুসারে ABCD অথবা ABED উভয় চতুর্ভুজেরই $\overline{AB} \equiv a$, $\overline{AD} \equiv b$, $\overline{BE} \equiv \overline{BC} \equiv d$ এবং $\overline{ED} \equiv \overline{CD} \equiv c$. আবার, AD ও AB বাহুর অন্তর্ভূত $\angle DAB =$ প্রদত্ত $\angle X$

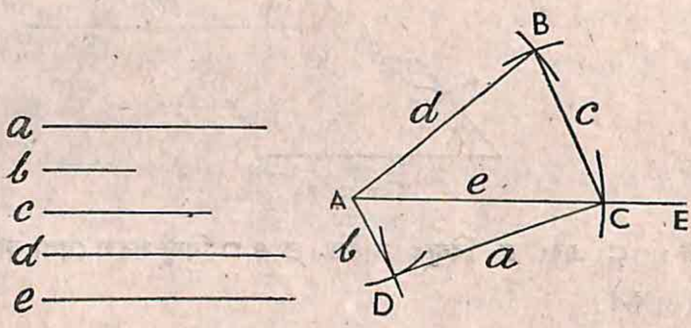
$\therefore$ ABCD এবং ABED উভয়েই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

সম্পাদ্য 9

কোন চতুর্ভুজের চারটি বাহু এবং একটি কর্ণ প্রদত্ত আছে ; চতুর্ভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

মনে কর যে চতুর্ভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে তাহার চারটি বাহু ও একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b, c, d ও e প্রদত্ত আছে।

অঙ্কন : AE যে কোন একটি সরল রেখা অঙ্কন করিয়া উহা হইতে c-র দৈর্ঘ্যের সমান করিয়া $\overline{AC}$ কাটিয়া লও। A ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে d ও c-র সমান দৈর্ঘ্যকে ব্যাসার্ধ ধরিয়া AC রেখার একই পার্শ্বে এমন দুইটি বৃত্ত চাপ অঙ্কন কর যাহারা



চিত্র নং 75

পরস্পরকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। পুনরায় A ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে b ও a-র সমান দৈর্ঘ্যকে ব্যাসার্ধ ধরিয়া এমন দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কন কর যাহারা B বিন্দুর বিপরীত পার্শ্বে D বিন্দুতে ছেদ করিল। A ও C বিন্দুকে B ও D বিন্দুর সহিত চারিটি সরল রেখাদ্বারা যুক্ত কর।

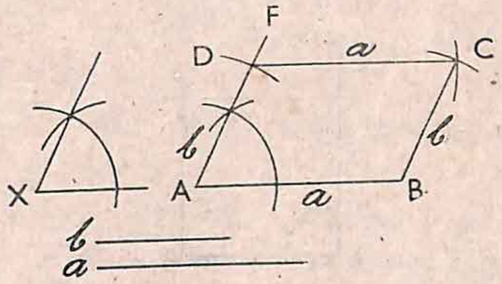
তাহা হইলে ABCD অভীষ্ট চতুর্ভুজ হইল।

প্রমাণ: ABCD চতুর্ভুজের AB বাহুর দৈর্ঘ্য $=d$, BC বাহুর দৈর্ঘ্য $=c$, AD বাহুর দৈর্ঘ্য $=b$ এবং CD বাহুর দৈর্ঘ্য $=a$ আবার AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $=e$।

সুতরাং ABCD চতুর্ভুজটি অভীষ্ট চতুর্ভুজ।

সম্পাদ্য 10

কোন সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূর্ত কোণ প্রদত্ত আছে ; সামান্তরিকটি অঙ্কন করিতে হইবে।



চিত্র নং 76

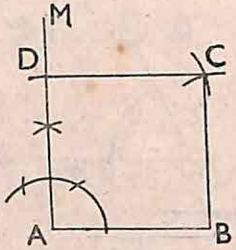
মনে কর যে সামান্তরিকটি অঙ্কন করিতে হইবে তাহার দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য a এবং b এবং উহাদের অন্তর্ভূর্ত কোণ X প্রদত্ত আছে।

অঙ্কন : প্রদত্ত a বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান করিয়া AB রেখাংশটি অঙ্কন কর। AB সরলরেখার A বিন্দুতে প্রদত্ত X কোণের সর্বসম ∠FAB অঙ্কন কর। AF সরলরেখা হইতে প্রদত্ত b বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান করিয়া $\overline{AD}$ কাটিয়া লও। এক্ষণে B এবং D বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে b ও a-র দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া এমন দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কন কর যাহারা পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। B এবং D বিন্দু দুইটিকে C বিন্দুর সহিত সরলরেখা দ্বারা সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে DABC অভীষ্ট সামান্তরিক হইবে।

সম্পাদ্য 11

কোণ নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করিতে হইবে।



চিত্র নং 77

AB একটি রেখাংশ ইহার উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন: AB রেখার উপর A বিন্দুতে AM লম্ব টান। AM হইতে AB-এর সমান করিয়া AD অংশ কাটিয়া লও। D এবং B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং AB ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর, উহারা যেন পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। BC, DC যুক্ত কর। তাহা হইলে ABCD উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র হইবে।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$

∴ ABCD একটি সামন্তরিক যাহার বাহুগুলি পরস্পর সমান। আবার ∠A = এক সমকোণ।

∴ ABCD একটি বর্গক্ষেত্র।

অনুশীলনী 4

1. চাঁদার সাহায্যে নিম্নের কোণগুলি প্রথমে আঁকিয়া প্রতিক্ষেত্রে উহাদের সর্বসম করিয়া এক একটি কোণ অঙ্কণ কর :

$60°, 45°, 30°, 20°, 15°, 90°, 120°, 22\frac{1}{2}°, 78\frac{1}{2}°$

2. নিম্নলিখিত অঙ্গবিশিষ্ট ত্রিভুজগুলি অঙ্কন কর :

(a) দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5 সে.মি. এবং 3 সে.মি. এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণের পরিমাপ 50°।

(b) দুইটি কোণের পরিমাপ যথাক্রমে 45° ও 60° এবং যে কোন একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি.।

(c) দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে.মি. এবং 4 সে.মি. এবং তৃতীয় বাহুটির সম্মুখস্থ কোণের পরিমাপ 90°। এইরূপ কতগুলি ত্রিভুজ অঙ্কন করা করা সম্ভব ?

(d) দুইটি কোণের পরিমাপ যথাক্রবে 30° এবং 70° এবং অবশিষ্ট কোণটির সম্মুখস্থ বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি.।

(e) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সে.মি. 7 সে.মি. এবং 9 সে.মি.; এই ত্রিভুজটির ভূমির দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. হইলে উহার শীর্ষকোণের পরিমাপ কর।

(f) দুইটি বাহু যথাক্রমে 6·2 সে.মি., 5·6 সে.মি. এবং প্রথম বাহুর বিপরীত কোণ $67\frac{1}{2}°$।

3. তোমার সুবিধা মত যে কোন একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিয়া উহার সর্বসম অপর একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

4. 5·2 সে.মি. 2·3 সে.মি. এবং 4·1 সে.মি. দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট বাহুগুলি লইয়া একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিয়া এই ত্রিভুজের সদৃশ অপর দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর যাহাদের একটি প্রথম ত্রিভুজটি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং অপরটি ক্ষুদ্রতর।

[মনে রাখিবে দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের একটির তিন কোণ অপরটি তিন কোণের সহিত সমান হয়]

5. 4 সে.মি. ভূমির উপর 6 সে.মি. উচ্চতা বিশিষ্ট একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

6. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি 12 সে.মি. এবং উহার ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি 65° ও 85°। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। [ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা সর্বদা বৃহত্তর হয় এবং যে কোন দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের অন্তর তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়]

7. নিম্নলিখিত অঙ্গ-বিশিষ্ট চতুর্ভুজ গুলি অঙ্কন কর।

(a) চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্যের পরিমাপ যথাক্রমে 4 সে.মি., 5 সে.মি., 3 সে.মি. এবং 4·5 সে.মি. এবং একটি কোণের পরিমাপ 45°।

(b) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যের পরিমাপ যথাক্রমে 3 সে.মি., 4·5 সে.মি. ও 5 সে.মি. এবং উহাদের অন্তর্গত কোণ দুইটি 60° ও 70°।

(c) চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্যের পরিমাপ যথাক্রমে 2 সে.মি., 3 সে.মি., 4 সে.মি. ও 5 সে.মি. ও এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 4·5 সে.মি.।

8. একটি চতুর্ভুজের দুইটি কর্ণের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 6 সে.মি. এবং কর্ণ দুইটি পরস্পরকে 60° কোণে ছেদ করে। চতুর্ভুজটি অঙ্কন কর।

9. এইরূপ একটি চতুর্ভুজ অঙ্কন কর যাহার দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য 4·2 সে.মি. এবং 5 সে.মি. এবং উহাদের সংলগ্ন কোণ তিনটি 80°, 120° ও 100°।

10. নিম্নলিখিত অঙ্গ-বিশিষ্ট সামান্তরিকগুলি অঙ্কিত কর যাহাদের সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের পরিমাপ ও অন্তর্ভুত কোণের পরিমাপ যথাক্রমে :

(a) 4 সে.মি., 3 সে.মি., 60°

(b) 3·5 সে.মি., 2·5 সে.মি., 75°

11. একটি রম্বস অঙ্কন কর যাহার প্রত্যেকটি বাহুর ও একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 3 সেন্টিমিটার।

12. একটি রম্বস অঙ্কন কর কর যাহার প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. এবং একটি কোণের পরিমাপ 60°।